Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Esercizio svolto in aula il 4.4.2023

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e biiettiva, tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$. Dimostrare che $f(D^n) = D^n$, dove $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

Svolgimento. La differenza $\mathbb{R}^n \smallsetminus S^{n-1}$ è unione di due sottoinsiemi

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}, \qquad C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}.$$

Visto che f è biiettiva e manda la sfera S^{n-1} in se stessa, allora $f(C_1 \cup C_2) = C_1 \cup C_2$. I sottoinsiemi C_1 e C_2 sono disgiunti e aperti in $C_1 \cup C_2$, poi ciascuno di essi è connesso per archi quindi è connesso.

Visto che f è continua, le immagini $f(C_1)$ e $f(C_2)$ sono connesse e contenute in $C_1 \cup C_2$, quindi per ogni $i \in \{1, 2\}$ abbiamo $f(C_i) \subseteq C_j$ per qualche $j \in \{1, 2\}$. Non solo: visto che f è suriettiva, le due immagini $f(C_1)$ ed $f(C_2)$ non possono essere contenute entrambe in una sola C_i. Quindi abbiamo solo due possibilità:

(1) $f(C_i) \subseteq C_i$ per ogni i, oppure
(2) $f(C_1) \subseteq C_2$ e $f(C_2) \subseteq C_1$.

Ora: se $f(C_1) \subseteq C_1$ e $f(C_2) \subseteq C_2$, allora per forza $f(C_1)$ deve essere tutta C_1. Segue $f(D^n) = D^n$. Supponiamo allora di avere $f(C_1) \subseteq C_2$: come prima otteniamo $f(C_1) = C_2$, e segue che $f(D^n)$ è il complementare di C_1. Cioè $f(D^n)$ è un chiuso *non limitato* di $\mathbb{R}^n$. Visto che D^n è compatto, questo è assurdo. $\square$