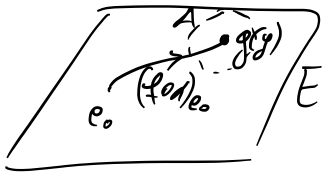
SULLA DIM. DELL'ULTIMO TEOREMA

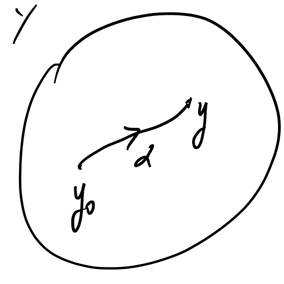
$$\begin{tikzcd} & E \ni e_0 \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \qquad Y \ni y_0$$

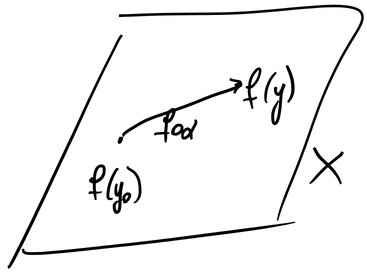
Per def. g fissiamo $\forall y \in Y$ un cammino $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$, e

def. $g(y) = Mon(e_0, f \circ \alpha)$



Dim. che g è continua in y $\forall y \in Y$.



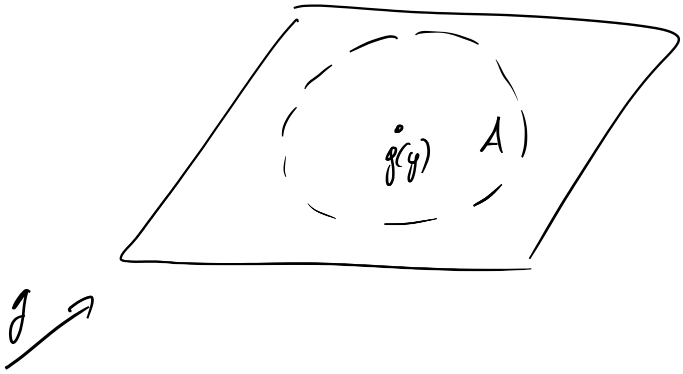


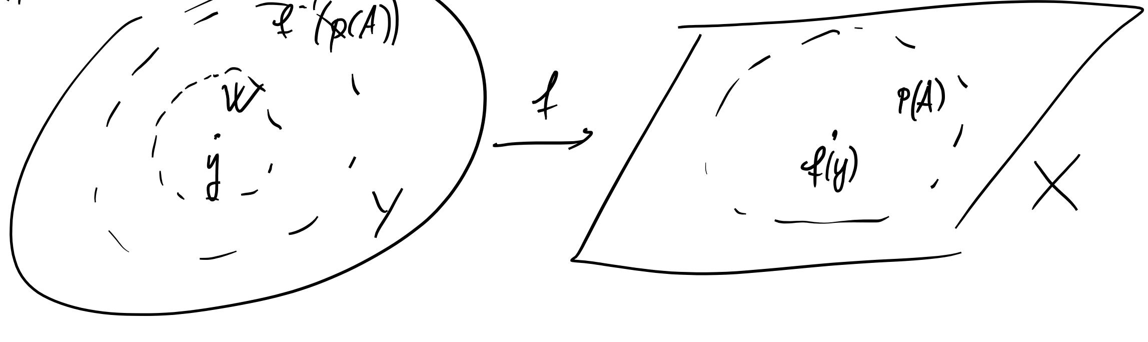
Scegliamo $A \subseteq E$ int. ap. di $g(y)$, troviamo int. ap. W di y tale che $g(W) \subseteq A$.

Fissiamo $V \subseteq X$ ap banalizzante cont. $f(y)$, e ci sarà un aperto $U \subseteq E$ cont. $g(y)$ tale che $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo.

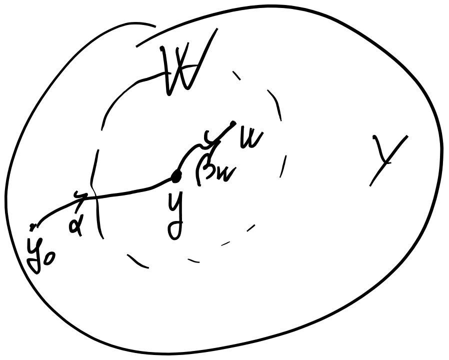
Possiamo rimpiazzare A con $A \cap U$ (se $g(W) \subseteq A \cap U$ allora $g(W) \subseteq A$ e avrei finito). Cioè supp che $\boxed{A \subseteq U}$.

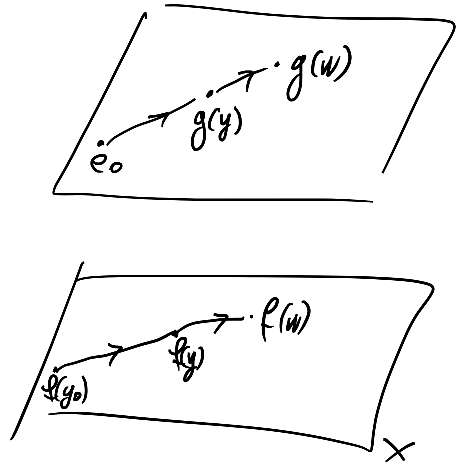
Supp. $p(A) \subseteq V$ ed è aperto, allora $f^{-1}(p(A))$ è un intorno aperto di y. Possiamo scegliere $W \subseteq f^{-1}(p(A))$ intorno aperto connesso per archi.





Allora $\forall w \in W$





scegliamo un cammino

β_w da y a w

tutto contenuto in W.

Allora $\alpha * \beta_w$ è un cammino in Y che poss. usare per def. $g(w)$.

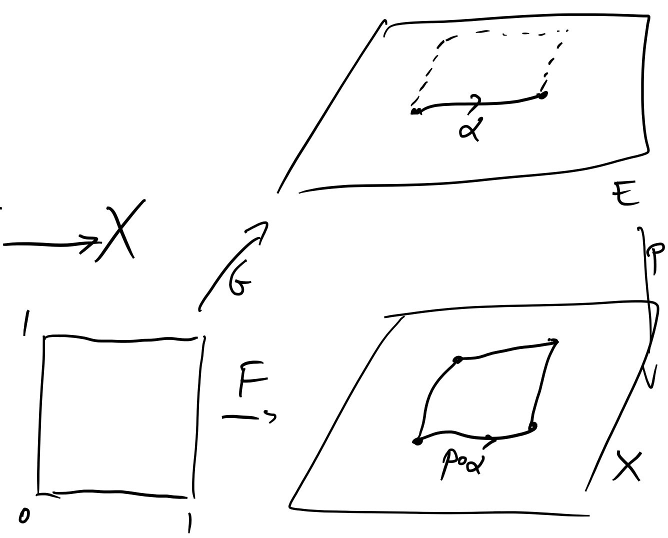
Cioè $g(w) = \mathrm{Mon}(e_0, f\circ(\alpha * \beta_w)) = \mathrm{Mon}(g(y), f\circ\beta_w)$

perché il sollevato di $f\circ\alpha$ va proprio da e_0 a $g(y)$

Ora: $\mathrm{Mon}(g(y), f\circ\beta_w)$ è il punto finale di $(f\circ\beta_w)_{g(y)}$,

e questo sollevato è proprio $(p|_U)^{-1}\circ f\circ\beta_w$ dove $(p|_U)^{-1}$ è la sezione locale di p nell'aperto U, che esiste perché $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo. Questa sezione locale manda $p(A)$ in A (perché $A \in U$), quindi il sollevato $(f\circ\beta_w)_{g(y)}$ è tutto contenuto in A, quindi anche il punto finale, cioè $g(w)$. Abb. dimostrato cioè che $g(W) \subseteq A$.

Sollevamento dell'omotopia di cammini:

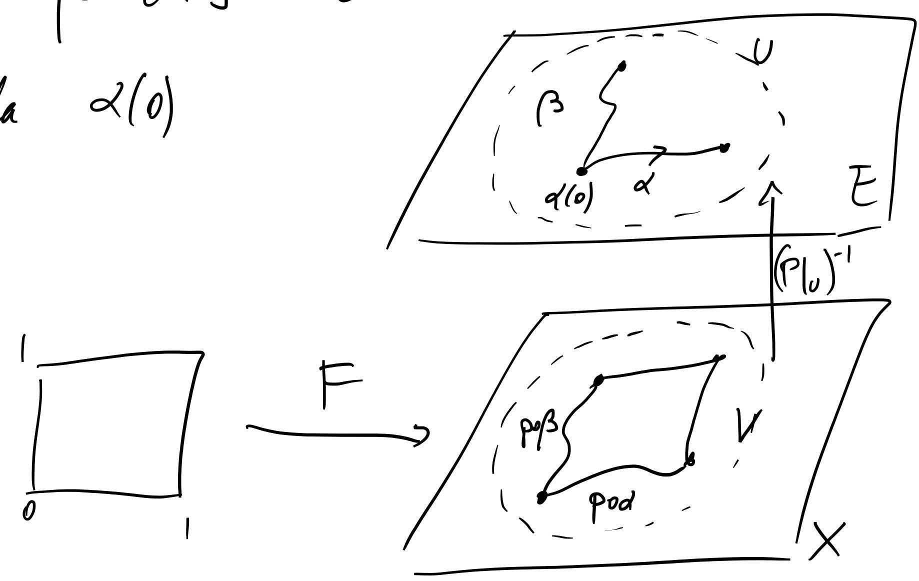


$F : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$, $p : E \longrightarrow X$

abb. anche $\alpha : [0,1] \to E$ che solleva il cammino $t \mapsto F(t,0)$, cioè

$(p \circ \alpha)(t) = F(t,0)$. Allora dobb. dim. che possiamo sollevare F a $G : [0,1] \times [0,1] \to E$ in modo che $\alpha(t) = G(t,0)$ $\forall t$.

Nella dim. abb. preso anche $\beta : [0,1] \to E$ che solleva $s \mapsto F(0,s)$ a partire da $\alpha(0)$



Dimostriamo che possiamo sollevare F a G tale che valga anche $G(0,s) = \beta(s)$.

Lo facciamo in due passi:

1) Supp. $F([0,1] \times [0,1])$ sia cont. in un aperto banalizzante V.

Allora esiste un aperto U della def. di rivestimento tale che $U \ni \alpha(0)$ (scelgo l'aperto con questa proprietà).

Dim. che l'immagine di α e quella di β sono contenute in U.

Abb. sicuramente $\alpha([0,1]) \subseteq p^{-1}(V)$ e $\beta([0,1]) \subseteq p^{-1}(V)$.

Sappiamo che $p^{-1}(V)$ è unione di aperti disgiunti, ognuno omeomorfo a V tramite p (U è uno di essi):

$$p^{-1}(V) = U \,\dot{\cup}\, (\text{l'unione degli altri aperti})$$

unione disgiunta

Visto che $\alpha([0,1])$ interseca U in $\alpha(0)$, e visto che $\alpha([0,1])$ è connesso, allora $\alpha([0,1])$ è tutto cont. in U (altrim. $U \cap \alpha([0,1])$ e (l'unione degli altri) $\cap\, \alpha([0,1])$ „sconnetterebbe" $\alpha([0,1])$). Stessa cosa con $\beta([0,1])$.

Ora definiamo $G = (p|_U)^{-1} \circ F$ dove $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo, ed è una sezione locale. Questa G è continua e solleva F perché $p \circ ((p|_U)^{-1} \circ F) = F$.

si cancellano

Inoltre $G(t,0)$ è un cammino che solleva $F(t,0) = (p\circ\alpha)(t)$ partendo da $\alpha(0)$. Anche α soddisfa queste proprietà, quindi $G(t,0) = \alpha(t)$ per l'unicità dei solleram. dei cammini.

Con stessa dim. abb. $G(0,s) = \beta(s)$.

<u>Spazi proiettivi complessi</u>: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \dfrac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$ identifico vettori non nulli lin. dipendenti

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ omeomorfo a S^2