Esercizio sulla top. di Zariski

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (pol. in n variabili a coeff. nel campo $\mathbb{K}$). Vogliamo dim. che $V(E) = V(I)$ dove $I = (E)$ è l'ideale

$V(E)$: zeri di tutti i pol. di E

gen. da E. Cioè $I = \{ p_1 f_1 + \dots + p_k f_k \mid p_i \text{ polinomi}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, f_i \in E \}$

In particolare $I \supseteq E$. Allora

$V(E) \supseteq V(I)$, perché se $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ è zero di tutti i polinomi in I, allora è zero di tutti gli elem. di E. Resta da dim. $V(E) \subseteq V(I)$.

Sia $(b_1, \dots, b_n) \in V(E)$, allora $f(b_1, \dots, b_n) = 0 \ \forall f \in E$, e se prendo un elem. qualsiasi di I allora è del tipo come sopra, e vale in $(b_1, \dots, b_n)$:

$$p_1(b_1, \dots, b_n) f_1(b_1, \dots, b_n) + \dots + p_k(b_1, \dots, b_n) f_k(b_1, \dots, b_n) = 0$$

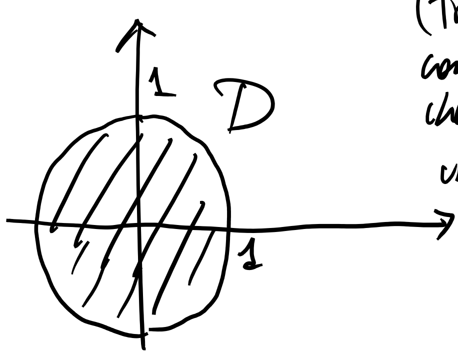
allora $(b_1, \dots, b_n) \in V(I)$.

Vogliamo confrontare due topologie su $\mathbb{R}^2$.

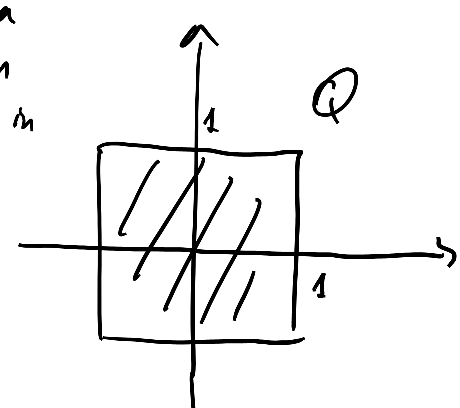
Potremmo cercare di scrivere un omeomorfismo $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ che trasforma tutti gli elem. di una base negli elem. dell'altra base. Però con dischi e rettangoli non sembra fattibile:

es.: $$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$$

$$Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{x,y\}<1\}$$



(trovo f che funziona con questi due, ma non che manda ogni disco in un rettangolo!)



Inoltre questo <u>non mostrerebbe</u> che le topologie sono <u>la stessa</u>.

Confrontiamo invece le due basi direttamente:

1) si fa vedere che ogni disco è unione di rettangoli. Allora la top. che ha per base i dischi è <u>meno fine</u> di quella che ha per base i rettangoli (perché segue che un'unione qualsiasi di dischi è anche unione di rettangoli).

2) viceversa, ogni rettangolo è unione di dischi. Allora le due topologie sono uguali.

X con top. cofinita, X infinito

Prendiamo due aperti non vuoti

$$X \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = U$$

$$X \setminus \{b_1, \dots, b_m\} = V$$

Calcoliamo $U \cap V = (X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \cap (X \setminus \{b_1, \dots, b_m\}) =$

$= \{x \in X \mid x \neq a_1, \dots, a_n, \text{ e } x \neq b_1, \dots, b_m\} =$

$= X \setminus \underbrace{\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}}_{\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_m\}}$

Questo non è vuoto, perché X è infinito.

Es.: $X = \mathbb{Z}_{>0}$, $\quad N_{a,b} = \{a + kb \mid k \geq 0\} =$
$= \{a, a+b, a+2b, \dots\}$

Da dim.: $\mathcal{B} = \{N_{a,b}\}$ sono una base di una topologia.

Da verificare:

1) $X = \bigcup_{N_{a,b} \in \mathcal{B}} N_{a,b}$, vero perché ho $X = N_{1,1}$

2) Siano $N_{a,b}$, $N_{c,d}$, dobb. dim. che $N_{a,b} \cap N_{c,d}$ è unione di elem. di $\mathcal{B}$.

$$M = \underbrace{N_{a,b}}_{\text{coprimi}} \cap \underbrace{N_{c,d}}_{\text{coprimi}} = \{ a+kb = c+hd \mid \underbrace{k \geq 0,\ h \geq 0}_{\text{solo quelli per cui ho l'uguaglianza}} \}$$

Sia $m \in M$, dobbiamo trovare x, y tali che $\underline{m \in N_{x,y}}$ e $\underline{N_{x,y} \subseteq M}$.

Per semplificare, proviamo a porre $m = x$, perché allora sicuram. $m \in N_{m,y}$.

Troviamo y coprimo con m tale che $N_{m,y} \subseteq M$.

Abb.: $N_{m,y} = \{ m, m+y, m+2y, \dots \}$

Usiamo: se $u, v \in N_{a,b}$ allora b divide $u-v$, e se $w, z \in N_{c,d}$ allora d divide $w-z$.

D'altronde ad es. $y = m - (m+y)$

devono essere in $N_{a,b}$ e in $N_{c,d}$

Allora se trovo y dovrà essere diviso da b e da d.

Proviamo con $y = bd$ (se non funziona cerchiamo di aggiustarlo). Perché funzioni, è richiesto che y sia coprimo con m, quindi calcoliamo $MCD(m, bd)$. Supp. di avere un primo p che divide bd, cioè p divide b oppure d. Supponiamo p divida m:

$$m = a + k_0 b = c + h_0 d \qquad \text{per certi } h_0, k_0$$

Ma se $p|b$ allora divide anche a: assurdo (a, b coprimi) e se $p|d$ allora divide c: assurdo.

Segue $MCD(m, bd) = 1$, cioè $N_{m, y_1 = bd}$ esiste.

Se prendo ora $N_{m, bd} = \{m, m+bd, m+2bd, \dots\} = \dots$

è cont. in $N_{a,b}$?

$$\dots = \{a + k_0 b,\ a + k_0 b + bd = a + b(k_0 + d),\ a + k_0 b + 2bd = a + b(k_0 + 2d), \dots\}$$

sì perché $m + sbd$ è del tipo $a + (\text{multiplo di } b)$.

Per lo stesso motivo $N_{m, bd} \subseteq N_{c,d}$, e allora ho trovato x, y voluti.

Sia $f: X \to Y$ (non necessariam. continua), siano

$A_i \subseteq X$ $\quad i \in$ insieme di indici I

Abb. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \overset{(?)}{=} \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

$\exists i \in I \mid x \in A_i$

$$y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff \boxed{\exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(x) = y}$$

$$y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i) \iff \exists i \in I \mid y \in f(A_i)$$
$$\iff \boxed{\exists i \in I,\ x \in A_i \mid y = f(x)}$$

Sia X sp. top. e $Y \subseteq X$. Consideriamo l'inclusione

$$\iota : Y \to X$$
$$y \mapsto y$$

Sia X con top. T_X.

Consid. su Y una topologia T_Y tale che ι è continua.

Allora $\underbrace{\iota^{-1}(A)}$ è aperto, cioè è in T_Y, $\forall A \in T_X$.

Sia $T_0 = \{\iota^{-1}(A) \mid A \in T_X\}$. Abb. fatto vedere che T_0 è una topologia su Y, d'altronde $T_0 \subseteq T_Y$.

Quindi T_0 è la topologia <u>meno fine</u> su Y per cui ι è continua