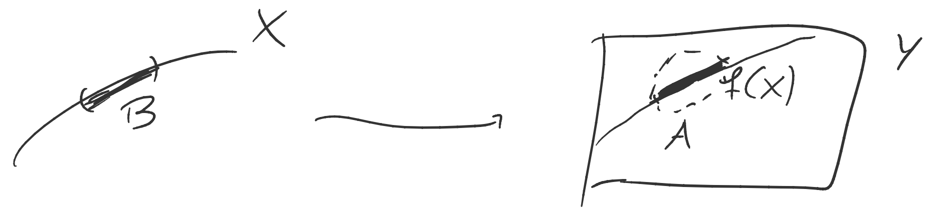
Friday, 19 March 2021 14:07

$f : X \longrightarrow Y$



1) f immersione, cioè f continua, iniettiva, gli ap. di X sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$ con $A \subseteq Y$ aperto.

2) f considerata come $\tilde{f} : X \to f(X)$ è un omeomorfismo fra X e $f(X) \subseteq Y$.

1) $\Rightarrow$ 2) Dobb. dim. $\tilde{f}$ biiettiva $\big(X \to f(X)\big)$

$\tilde{f}$ continua

$\tilde{f}^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ continua

$\tilde{f}$ biiettiva perché f è iniettiva

$\tilde{f}$ continua perché f continua

$\tilde{f}^{-1}$ continua? Sia $B \subseteq X$ aperto, dobb. dim. che $\big(\underbrace{\tilde{f}^{-1}}_{\text{continua?}}\big)^{-1}(B)$ aperto, cioè $\underline{\tilde{f}(B) \text{ è aperto in } f(X)}$.

Dato che f è immersione, esiste $A \subseteq Y$ aperto tale che $B = f^{-1}(A)$. D'altronde $f^{-1}(A) = f^{-1}\big(\underbrace{A \cap f(X)}_{\text{aperto in } f(X)}\big)$

o visto che $A \cap f(X) \subseteq f(X)$, allora aperto in $f(X)$

e visto che $A \cap f(X) \subseteq f(X)$, allora

$$f^{-1}(A \cap f(X)) = \boxed{\tilde{f}^{-1}(\underbrace{A \cap f(X)}) = B}$$

Visto che $\tilde{f}$ è una biiezione fra X e $f(X)$, abb.

$$\tilde{f}(B) = \cancel{\tilde{f}}\left(\cancel{\tilde{f}}^{-1}(A \cap f(X))\right) = A \cap f(X) \text{ ap. di } f(X).$$

2) $\Rightarrow$ 1) | Dobb. dim.: • f iniettiva : ovvio, perché $\tilde{f}$ è biiettiva

• f continua

• gli ap di X sono i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$ con $A \subseteq Y$ aperto

f continua? | Sia $A \subseteq Y$ aperto, dim. che $f^{-1}(A)$ aperto in X.

D'altronde $f^{-1}(A) = f^{-1}(\underbrace{A \cap f(X)}_{\text{ap. in } f(X)}) = (\tilde{f}^{-1})(A \cap f(X))$

Visto che $\tilde{f}$ è continua, $(\tilde{f}^{-1})(A \cap f(X))$ è aperto in X, quindi f è continua.

ultima affermaz. sugli aperti di X | Sia $B \subseteq X$ aperto, visto che $\tilde{f}$ è omeomorfismo, allora $\tilde{f}(B)$ è un aperto di $f(X)$.

Cioè esiste $A \subseteq Y$ aperto tale che $A \cap f(X) = \tilde{f}(B)$.

Cioè esiste $A \subseteq Y$ aperto tale che $\underbrace{A \cap f(X)} = \underbrace{\tilde{f}(B)}$.

Allora $(\tilde{f}^{-1})(\underbrace{A \cap f(X)}) = B$ ($\tilde{f}$ biiettiva)

Ma $(\tilde{f}^{-1})(A \cap f(X)) = f^{-1}(A \cap f(X)) = f^{-1}(A)$

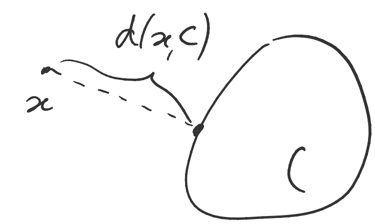
quindi $B = f^{-1}(A)$.

<u>Esercizio</u>: X spazio metrico, $C, D \subseteq X$ chiusi disgiunti.

Trovare $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $C = f^{-1}(0)$
$D = f^{-1}(1)$.

<u>Svolgimento</u>: Se abb. <u>un solo chiuso</u>, allora

$$g = d(-, C) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto d(x, C)$$



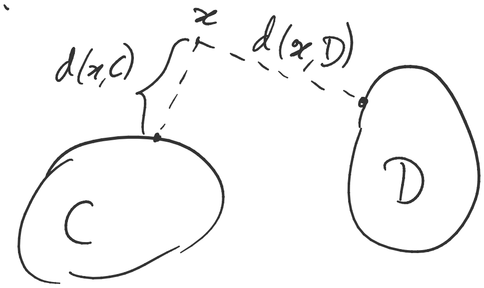
è <u>continua</u>, e $g^{-1}(0) = C$.

visto a lezione

è vera perché C è chiuso,
perché se $d(x, C) = 0$ allora
x è aderente a C, perché ci sono punti
di C arbitrariam. vicini a x, e quindi
$x \in C$ perché C è chiuso

C è arbitrariam. vicin a x, e quindi
$x \in C$ perché C è chiuso.

Se abbiamo due chiusi C, D:



Voglio una formula che varia a seconda di $d(x,D)$:

deve variare da 0 per $x \in C$

a $1 = \dfrac{d(x,C)}{d(x,C)}$ per $x \in D$

poniamo $$f(x) = \frac{d(x,C)}{d(x,C) + d(x,D)}$$

Con questa formula: $\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = 0 & \text{se } x \in C \\ f(x) = 1 & \text{se } x \in D \end{array}}$

f è anche continua ed è ben definita, cioè il denom. è sempre $\neq 0$,

perché se $\underbrace{d(x_0, C)}_{\geq 0} + \underbrace{d(x_0, D)}_{\geq 0} = 0$ allora $d(x_0, C) = 0$,

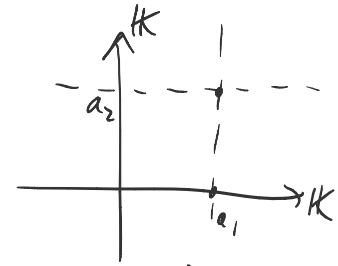
$d(x_0, D) = 0$, allora $x_0 \in C$ e $x_0 \in D$, assurdo.

Inoltre $\boxed{\begin{array}{lll} \text{se } x \notin C & \text{allora} & f(x) \neq 0, \\ \text{se } x \notin D & \text{allora} & f(x) \neq 1. \end{array}}$ segue $C = f^{-1}(0)$ e $D = f^{-1}(1)$

se $\boxed{x \notin D \text{ allora } f(x) \neq 1}$ $\qquad D = f^{-1}(1)$

Es.: Sia $\mathbb{K}$ campo finito, $\mathbb{K}^n$ con topologia di Zariski.

Osserviamo che dato $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ allora $\{(a_1, \dots, a_n)\}$ è chiuso, infatti è il luogo degli zeri simultanei dei polinomi $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n$ (nelle variabili $x_1, \dots, x_n$).

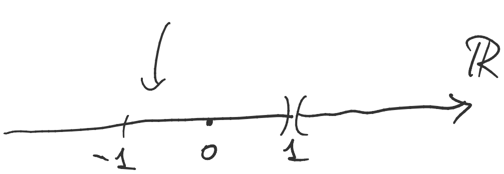


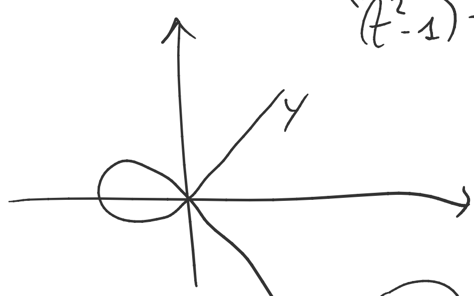
Ora: $\mathbb{K}^n$ è un insieme finito (perché $\mathbb{K}$ è finito), e unioni di un num finito di chiusi sono chiuse. Quindi tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$ sono chiusi, e allora sono anche tutti aperti, quindi la top. è discreta.

Esercizio su

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow Y = \{y^2 = x^3 + x^2\}$$

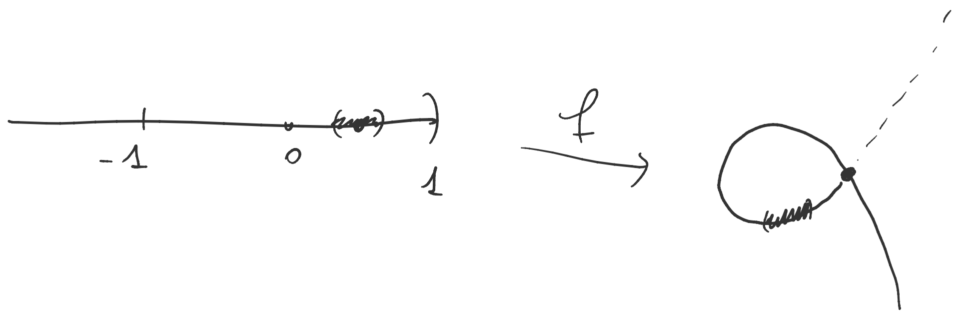
$$t \longmapsto (t^2 - 1, \underbrace{t^3 - t}_{= (t^2-1)t})$$

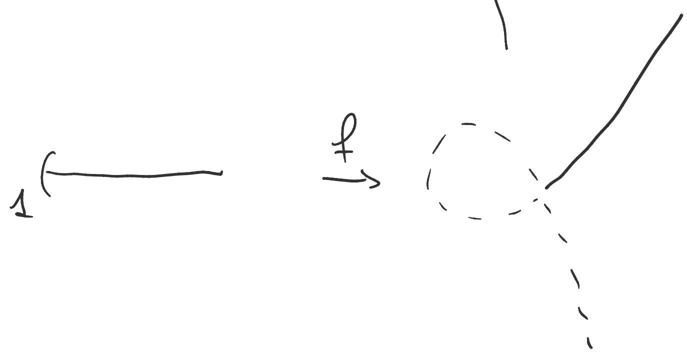




f è biiettiva, $f^{-1}(x, y) = \begin{cases} y/x & \text{se } x \neq 0 \\ \dots & \text{se } x = 0 \end{cases}$

f è biiettiva, $f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \dots \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

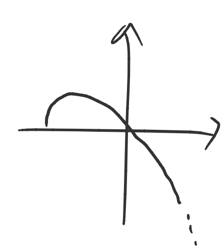




Per $t \neq -1$ posso scegliere un intervallo del tipo $U =]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$ che non contenga -1. Allora $f|_U : U \to f(U)$ è data dalla formula di f, $f^{-1}|_{f(U)} : f(U) \to U$ è data dalla formula di f^{-1} e sono entrambe continue (infatti su $f(U)$ la x è sempre $\neq 0$ e y/x è continua).

Per $t = -1$ il rischio è di prendere nel codominio entrambi i "rami" della curva attorno a 0:

(In questo caso f^{-1} non sarebbe continua)

Allora basta prendere $U =]-\infty, 0[$: $f(]-\infty, 0[) =$ 

in $f(U)$ possiamo scrivere $f^{-1}(t) = -\sqrt{x+1}$

in $f(U)$ possiamo scrivere $f^{-1}(t) = -\sqrt{x+1}$

Allora sia f sia f^{-1} sono date da espressioni continue.