Geometria 2, Lezione 9

Thursday, 18 March 2021 10:07

<u>Lemma</u>: Sia $f: S^n \to \mathbb{R}$ continua, $n \geq 1$.

Allora esiste $x_0 \in S^n$ tale che $f(x_0) = f(-x_0)$.

In particolare f non è iniettiva.

<u>Dim.</u>: Sia
$$g: S^n \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) - f(-x)$$

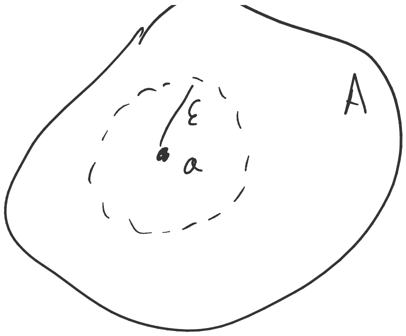
Oss.: g è continua, S^n è connesso, quindi $g(S^n)$ è connesso, cioè è un intervallo. Sia $x \in S^n$ qualsiasi, se $g(x) = 0$ allora pongo $x_0 = x$, altrimenti $g(S^n)$ contiene $g(x)$ e $g(-x) = -g(x)$, due numeri non nulli, uno l'opposto dell'altro. Segue: $g(S^n)$ contiene anche 0, cioè esiste $x_0 \in S^n$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = f(-x_0)$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, e $n > 1$ allora <u>non</u> è omeomorfo a $\mathbb{R}$ (in particolare, $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}$).

<u>Dim.</u>: Se $A = \emptyset$ allora è ovvio. Se $A \neq \emptyset$, consid. $a \in A$ e $\varepsilon > 0$ tale che $B(a, \varepsilon) \subseteq A$.

Allora $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\| = \frac{\varepsilon}{2}\} = S$



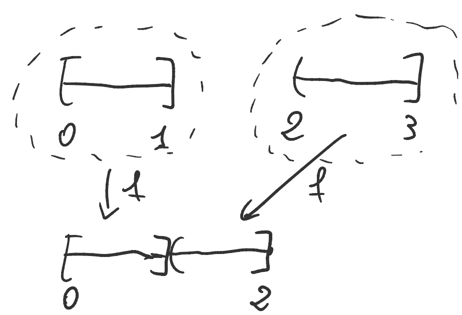
Allora $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\| = \varepsilon/2\} = S$ è contenuto in A, ed è omeomorfo a S^{n-1}. Sia per assurdo $\varphi : A \to \mathbb{R}$ omeomorfismo, in particolare φ è iniettiva. Allora $f = \varphi|_S : S \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva: assurdo per il lemma.

$\square$

Ci chiediamo adesso sotto quali ipotesi potremmo avere che $f^{-1}(\text{connesso})$ è connessa. Potremmo chiedere, oltre alla continuità di f, che le controimmagini di tutti i punti siano connesse. Questo però <u>non basta</u>!

<u>Esempio</u>: Sia $X = [0,1] \cup]2,3]$, $Y = [0,2]$, $f : X \to Y$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$



Qui $f(X)$ è connesso, $f^{-1}(y)$ connessa $\forall y \in Y$, ma X è <u>sconnesso</u>. Oss. f non è aperta, e neppure chiusa.

<u>Lemma</u>: Sia $f : X \to Y$ continua, suriettiva, Y connesso. Supp. $f^{-1}(y)$ connesso $\forall y \in Y$, e supp f <u>aperta</u> oppure <u>chiusa</u>.

connesso $\forall y \in Y$, e supp f aperta oppure chiusa.

Allora X è connesso.

Dim.: Facciamo la dim. nell'ipotesi f aperta. Per assurdo sia $X = A \cup B$ con A, B aperti propri disgiunti. Allora $f(A), f(B)$ sono aperti e $Y = f(A) \cup f(B)$ (perché f è suriettiva), non vuoti: allora $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$. Consid. $y \in f(A) \cap f(B)$, e $f^{-1}(y)$.

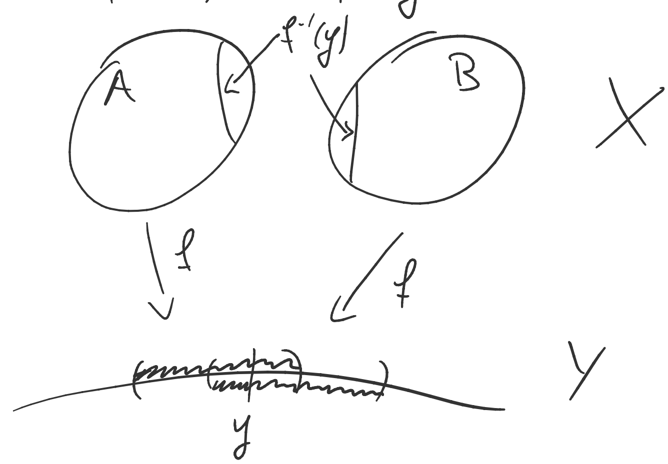


Abb. $f^{-1}(y)$ connesso cont. in X, e A è aperto e chiuso. Allora $f^{-1}(y)$ è tutto contenuto in A opp. in $X \setminus A = B$.

Ma se $f^{-1}(y) \subseteq A$ allora nessun punto di B va in y: assurdo, e se $f^{-1}(y) \subseteq B$ ——, —— A —/—: assurdo.

□

Teorema: Il prodotto di due spazi connessi è connesso.

Dim.: Siano P, Q spazi topologici connessi, e $p: P \times Q \to P$ la proiezione. Sappiamo che p è aperta, e che per ogni $x \in P$ la controimmagine $p^{-1}(x) = \{x\} \times Q$, che è omeomorfa a Q, la controimmagine $p^{-1}(x) = \{x\} \times Q$, che è omeomorfa a Q, quindi è connessa. Inoltre p è suriettiva, P è connesso, quindi $P \times Q$ è connesso per il lemma. $\square$

<u>Esercizio per casa</u>: Il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

<u>Lemma</u>: Sia X spazio topologico, e $Y \subseteq X$ un sottospazio connesso. Consid. la chiusura $\overline{Y}$ di Y come sottoinsieme di X. Sia $W \subseteq X$ tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora anche W è connesso (in particolare, $\overline{Y}$ è connesso).

<u>Dim.</u>: Sia W come nel lemma, e sia $Z \subseteq W$ contemp. aperto e chiuso in W. Dim. che $\underline{W = Z}$ opp. $W = \emptyset$. Visto che Y è connesso e contenuto in W, abb. $Y \subseteq Z$ oppure $Y \subseteq W \setminus Z$. Supp. $Y \subseteq Z$, allora la chiusura di Z in X contiene la chiusura di Y in X. Visto che $W \subseteq W \cap \overline{Y}$ allora la chiusura di Z in W contiene anche W, questo perché $Z \subseteq W$, e allora la chiusura di Z in W è uguale a W intersecato la chiusura di Z in X. Ma Z è chiuso in W, quindi coincide con la sua chiusura in W, e segue: $Z = W$. Rimane da considerare il caso $Y \subseteq Z' = W \setminus Z$. Allora applichiamo la prima parte della dim. a Z' invece che Z, perché Z' è anch'esso aperto e chiuso in W. Otteniamo

a Z' invece che Z, perché Z' è anch'esso aperto e chiuso in W. Otteniamo $Z' = W$, quindi $Z = \emptyset$. $\square$

Def.: Sia X spazio topologico, e $C \subseteq X$. Allora C si dice <u>componente connessa</u> di X se C è connesso e massimale rispetto a questa proprietà, cioè $\forall A \subseteq X$ tale che A è connesso e $A \supseteq C$, abbiamo $A = C$.

Oss.: 1) Se X è connesso allora contiene una sola componente connessa, che è X stesso.

2) In generale, le componenti connesse sono sempre <u>chiuse</u>, grazie al lemma precedente.

Es.: Calcoliamo le comp. connesse di $\mathbb{Q}$: sia C una di esse.

Allora C non può contenere più di un punto, perché se $a, b \in C$ con $a < b$, allora esiste un numero irrazionale ξ fra a e b, e C non può essere connesso perché $C = \underbrace{\left(]-\infty, \xi[\cap C\right)} \cup \underbrace{\left(C \cap]\xi, +\infty[\right)}$

aperti disgiunti propri di C

Segue: le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i singoli punti, infatti sono chiusi (perché $\mathbb{Q}$ è di Hausdorff, essendo uno spazio metrico), però le chiusi (perché $\mathbb{Q}$ è di Hausdorff, essendo uno spazio metrico), però le componenti connesse non sono aperte.

Sia X spazio topologico e $x \in X$. Allora esiste un'unica componente connessa $C(x)$ di X contenente x. Infatti basta definire

$$C(x) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \ni x,\ Y \text{ connesso}}} Y$$

Con questa def., $C(x)$ è connesso grazie all'esercizio seguente:

<u>Esercizio</u>: Se X sp. top., $Z_i \subseteq X$ con $i \in I$ tali che Z_i è connesso $\forall i$ e esiste $x \in X$ con $x \in Z_i$ $\forall i$, allora $\bigcup_{i \in I} Z_i$ è connessa.

D'altronde $C(x)$ è un connesso massimale, perché se ho $D \supseteq C(x)$ connesso allora $D \ni x$, e quindi D compare come uno degli Y della def di $C(x)$, cioè $D \subseteq C(x)$.

Segue: $C(x)$ è una componente connessa.

Inoltre due componenti connesse diverse devono anche essere <u>disgiunte</u>, altrimenti la loro unione sarebbe connessa (per l'esercizio) e coinciderebbe allora

[illegible]

altrimenti la loro unione sarebbe connessa (per l'esercizio), e coinciderebbe allora con entrambe.

Infine

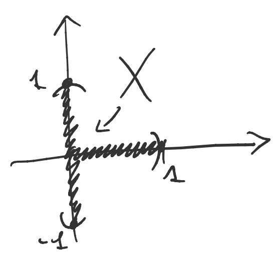
$$X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

cioè X è unione delle sue componenti connesse.

<u>Oss.</u>: Ovviamente un omeomorfismo manda componenti connesse in componenti connesse, e preserva il numero di componenti connesse.

Quindi il <u>numero</u> di componenti connesse si può usare per dim. che due spazi topologici <u>non</u> sono omeomorfi.

<u>Esercizio</u>:



$$X = (\{0\} \times]-1,1[) \cup (]0,1[\times \{0\})$$

$$Y =]0,1[$$

Dim. che X non è omeomorfo a Y (Sugg.: usare le componenti connesse).