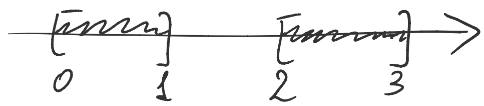
Geometria 2, Lezione 8

Tuesday, 16 March 2021 13:02

Connessione per spazi topologici

Esempio: $X = [0,1] \cup [2,3]$ ($\subseteq \mathbb{R}$, con top. euclidea)



Vogliamo dare una nozione di spazio topologico connesso, che corrisponda all'idea intuitiva di essere fatto „da un pezzo solo".

vogliamo che $[0,1] \subseteq X$ sia un „pezzo" di X, ma $[0,\frac{1}{2}] \subseteq X$ no

Osserviamo che $X \setminus [0,\frac{1}{2}]$ non è chiuso, infatti $\frac{1}{2}$ è aderente a $X \setminus [0,\frac{1}{2}]$ ma appartiene a $[0,\frac{1}{2}]$.

Invece $X \setminus [0,1] = [2,3]$ è chiuso in X.

Inoltre anche $[0,\frac{1}{2}[\cap X$. Anch'esso non dovrebbe essere un "pezzo" di X, perchè $\frac{1}{2}$ è aderente a $[0,\frac{1}{2}] \cap X$ ma è un elemento del complementare.

Infine: $[0,1]$ va bene, perchè è chiuso, e il suo complementare anche, cioè $[0,1]$ è aperto e chiuso in X.

Definizione: Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$.

Se X non è connesso si dice ...

contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$.

Se X non è connesso, si dice <u>sconnesso</u>.

<u>Esempio</u>: 1) se $X = \emptyset$ è connesso.

se $|X| = 1$ allora $\mathcal{P}(X) = \{X, \emptyset\}$ è l'unica topologia possibile su X, e X è connesso.

2) se $|X| \geq 2$ e ad es. X ha topologia discreta, allora tutti i sottoinsiemi sono sia aperti sia chiusi, ed esistono sottoinsiemi $\neq X, \emptyset$, quindi X è sconnesso.

<u>Lemma</u>: Sono equivalenti:

1) X è sconnesso

2) X è unione <u>disgiunta</u> di due sottoinsiemi aperti <u>propri</u> (cioè $\neq X$)

3) X è unione disgiunta di due sottoinsiemi chiusi propri

<u>Dim.</u>: 1) ⇒ 2) Se X è sconnesso allora esiste $A \subseteq X$ con A aperto e chiuso, e $A \neq X$, $A \neq \emptyset$.

Segue: $X = A \cup (X \setminus A)$, e vale: $A, (X \setminus A)$ sono entrambi aperti, sono disgiunti, e $\neq X$.

entrambi aperti, sono disgiunti, e $\neq X$.

2) $\Rightarrow$ 3) Supp. $X = A \cup B$ dove A, B aperti disgiunti e $\neq X$. Allora A e B sono anche chiusi perché uno è il complem. dell'altro.

3) $\Rightarrow$ 1) Supp. $X = C \cup D$ dove C e D disgiunti, chiusi propri, allora $C \neq \emptyset$, $\neq X$ ed è contemp. aperto e chiuso.

$\square$

top. euclidea

Esempio: 1) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso, infatti $]-\infty, 0[$ è aperto in X, non vuoto, proprio, ed è anche chiuso in X (con top. di sottosp.)

$$]-\infty, 0[= \underbrace{]-\infty, 0]}_{\text{chiuso di } \mathbb{R}} \cap X$$

2) $X = \mathbb{Q}$ è sconnesso, infatti $]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ è aperto e chiuso in X, è $\neq X, \emptyset$.

Lemma: Sia X spazio topologico, sia $Y \subseteq X$ un sottospazio connesso. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme aperto e chiuso. Allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Dim.: Abb. $A \cap Y$ è aperto e chiuso in Y, quindi $A \cap Y = Y$ (e allora $Y \subseteq A$) opp. $A \cap Y = \emptyset$ (e allora $Y \subseteq X \setminus A$). $\square$

Teorema: $[0,1]$ è connesso (in top euclidea).

Dim.: Supp. per assurdo (usando il primo lemma) che $[0,1] = C \cup D$ con $C, D \neq [0,1]$ (quindi $\neq \emptyset$), chiusi e disgiunti.
Possiamo assumere $0 \in C$ (altrimenti scambiamo C e D).
Consideriamo $d = \inf D$. Visto che D è chiuso abb. $d \in D$.
Se $d = 0$ allora ho un assurdo, perché $0 \in C$.
Quindi $d > 0$. Allora $[0, d[$ è non vuoto, ed è contenuto in C.
Però allora d è aderente a C, quindi $d \in C$: assurdo. $\square$

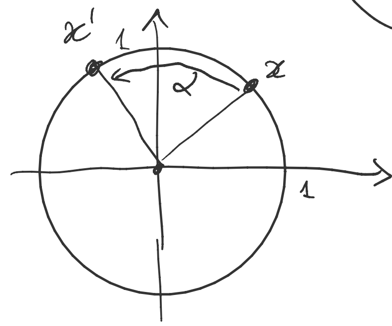
Oss.: Anche tutti gli altri intervalli sono connessi, lo ricaveremo dal teorema.

Definizione: Sia X spazio topologico, X si dice connesso per archi se $\forall x, x' \in X$ esiste $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = x'$.

Esempio: $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è connesso per archi.

$(n \geq 1)$

Vediamo S^1:



siano $x, x' \in S^1$,
possiamo scriverli come

$$x = (\cos(t_0), \sin(t_0)) \qquad x' = (\cos(t_1), \sin(t_1))$$

allora
$$\alpha : [0,1] \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto \left(\cos\left(\underline{(1-t)t_0 + t t_1}\right), \sin\left((1-t)t_0 + t t_1\right)\right)$$

è continua e vale $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = x'$.

Per $n \geq 2$: possiamo scegliere un sottospazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ di dim. 2 che contiene x e x'. Possiamo scegliere $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ isomorfismo lineare ortogonale (cioè che rispetta il prodotto scalare).

Allora $\varphi(V \cap S^n) = S^1$. Sappiamo per il caso $n=1$ che esiste una $\alpha : [0,1] \to S^1$ continua tale che $\alpha(0) = \varphi(x)$, $\alpha(1) = \varphi(x')$

allora $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : [0,1] \to S^n$ è continua e vale $\beta(0) = x$, $\beta(1) = x'$.

Quindi S^n è connessa per archi.

__Teorema:__ Sia $f : X \to Y$ continua fra spazi topologici.

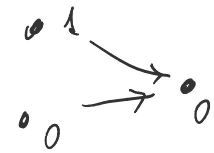
1) Se X è connesso, allora $f(X)$ è connesso.

2) Se X è connesso per archi, allora $f(X)$ è connesso per archi.

__Es.:__ Attenzione: la __controimmagine__ di un connesso non è sempre connessa,

ad es. $f : \{0,1\} \to \{0\}$

$0, 1 \longmapsto 0$

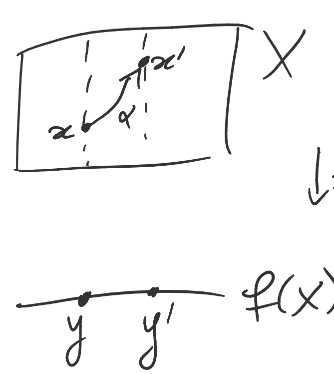


__Dim.:__ 1) Supp. per assurdo che $f(X)$ sia sconnesso. Allora $f(X)$ è unione disgiunta di due aperti propri: $f(X) = A \cup B$.

Abb. già visto che f è continua anche come applicazione $f : X \to f(X)$. Allora $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti disgiunti di X, inoltre $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Abb.: A e B sono non vuoti, quindi anche $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, e allora anche questi sono propri.

Otteniamo che X è sconnesso: assurdo.

2) Siano $y, y' \in f(X)$ e scegliamo $x \in f^{-1}(y)$, $x' \in f^{-1}(y')$.



Esiste $\alpha : [0,1] \to X$ continua tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = x'$

Esiste $\alpha : [0,1] \to X$ continua

tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = x'$.

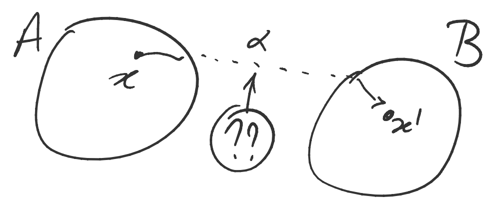
Segue: $\beta = f \circ \alpha : [0,1] \to f(X)$ è continua e vale $\beta(0) = y$, $\beta(1) = y'$.

$\square$

<u>Proposizione:</u> Se X è connesso per archi allora è connesso.

<u>Dim.:</u> Per assurdo, supponiamo $X = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti propri ($\Rightarrow$ non vuoti). Scegliamo $x \in A$, $x' \in B$ e consid. $\alpha : [0,1] \to X$ continua, tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = x'$.

Allora $\alpha^{-1}(A)$ e $\alpha^{-1}(B)$ sono aperti disgiunti non vuoti ($\Rightarrow$ propri) di $[0,1]$, d'altronde $[0,1] = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$, quindi $[0,1]$ è sconnesso: assurdo.

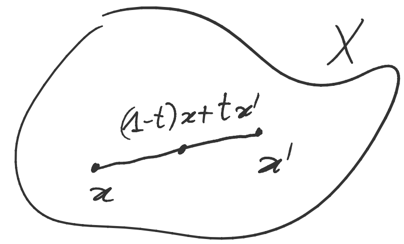


$\square$

<u>Ricordiamo:</u> un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>convesso</u> se

$$\forall x, x' \in X \ \forall t \in [0,1] : \quad (1-t)x + tx' \in X,$$

cioè se il segmento che unisce x e x' è contenuto in X.



cioè se il segmento che unisce x e x' è contenuto in X.

<u>Oss.:</u> Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è <u>convesso</u> allora è connesso per archi (basta prendere $\alpha(t) = (1-t)x + tx'$) ed è anche connesso, per la proposizione.

<u>Es.:</u> $B(x, r)$ in $\mathbb{R}^n$ è convesso e quindi connesso per archi e connesso.
$r>0$

<u>Proposizione:</u> Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:

1) I è un intervallo,
2) I è connesso per archi,
3) I è connesso.

<u>Dim.:</u> Ric.: per definizione, I è un intervallo se $\forall a, b \in I$ $\forall c$ tale che $a < c < b$ abb. $c \in I$.

1) ⇒ 2) Se I è un intervallo allora I è convesso, quindi è connesso per archi.

2) ⇒ 3) Vale per la prop. precedente.

3) ⇒ 1) Supp. I connesso, e supp. per assurdo che I <u>non</u> sia un intervallo. Cioè esistono a, b, c con $a, b \in I$, $a < c < b$, e $c \notin I$. Allora $I = (I \cap]-\infty, c[) \cup (I \cap]c, +\infty[)$

ed è unione disgiunta di aperti non vuoti ($\Rightarrow$ propri): assurdo.

$\square$

<u>Oss.</u>: La connessione (e la conn. per archi) ci aiuta a dimostrare che molti spazi topologici <u>non</u> sono omeomorfi fra loro. Infatti ad es. se X è connesso e Y è sconnesso, allora <u>non sono</u> omeomorfi.

<u>Es.</u>: Si può usare la connessione per dimostrare che $[0,1[$ e $]0,1[$ <u>non</u> sono omeomorfi.

<u>Esercizi ed esempi</u>

<u>Esercizio 1</u>) Vediamo l'esercizio sui localmente chiusi. Sia X sp. top, $Z \subseteq X$.

Z loc. chiuso $\Rightarrow$ aperto nella sua chiusura

Per ogni $z \in Z$ scegliamo U_z intorno aperto di z in X tale che $Z \cap U_z$ è chiuso in U_z.

Tentativo: $Z \overset{?}{=} \left(\bigcup_{z\in Z} U_z\right) \cap \overline{Z}$

$\subseteq$] ovvia, perché $Z \subseteq \bigcup_{z\in Z} U_z$, e $Z \subseteq \overline{Z}$.

$\supseteq$] Sia $x \in \left(\bigcup_{z\in Z} U_z\right) \cap \overline{Z}$, scegliamo z_0 tale che

perché U_{z_0} è aperto, quindi dato $y \in U_{z_0}$ ogni suo intorno $\underline{\text{in } X}$ interseca $Z \iff$ ogni suo intorno $\underline{\text{in } U_{z_0}}$ interseca Z

$x \in U_{z_0} \cap \overline{Z} =$ chiusura di $U_{z_0} \cap Z$ in U_{z_0}

chiusura di Z in X

Ma $U_{z_0} \cap Z$ è chiuso in U_{z_0}, quindi $U_{z_0} \cap \overline{Z} = U_{z_0} \cap Z$

quindi $x \in Z$.

Segue: $Z = \underbrace{\left(\bigcup_{z\in Z} U_z\right)}_{\text{ap. di } X} \cap \overline{Z}$ quindi Z è aperto in $\overline{Z}$.

$\underline{Z \text{ aperto in } \overline{Z} \Rightarrow Z = \text{aperto} \cap \text{chiuso}}$

Se Z è aperto in $\overline{Z}$ allora $\exists A \subseteq X$ aperto tale che $\underset{\text{chiuso}}{\overline{Z}} \cap \underset{\text{aperto}}{A} = Z$

$\underline{Z = \text{aperto} \cap \text{chiuso} \Rightarrow Z \text{ localm. chiuso}}$

Sia $Z = A \cap C$ ... U_z ... $U_z \subseteq X$

Sia $Z = \underset{\text{aperto}}{A} \cap \underset{\text{chiuso}}{C}$, per ogni z dobb. trovare U_z ap. in X t.c. $Z \cap U_z$ chiuso in U_z, e basta prendere $A = U_z$ per ogni $z \in Z$. Infatti $Z \cap A = Z = A \cap C$ quindi Z è chiuso in A, cioè $Z \cap U_z$ è chiuso in U_z.

Esercizio: Dim. che $[0,1[$ non è omeomorfo a $]0,1[$.

Svolgim.: Supp. per assurdo che $[0,1[$ omeom. a $]0,1[$. Allora avrei $[0, \frac{1}{2}[$ omeomorfo a un aperto di $]0,1[$, ma non sembra aiutare. Usiamo allora il complementare di $\{0\}$:

$[0,1[\setminus \{0\} =]0,1[$ è connesso

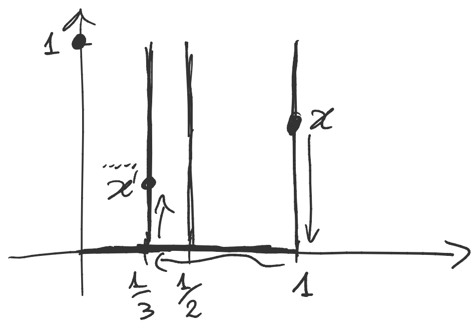
Se avessi $f: [0,1[\to]0,1[$ omeomorfismo, allora anche la restr.

$f|_{]0,1[} :]0,1[\longrightarrow]0,1[\setminus \{f(0)\}$ sarebbe un omeomorfismo

(esercizio: dimostrarlo). Ma $]0,1[\setminus \{f(0)\}$ è sconnesso, perché non è un intervallo, mentre $]0,1[$ è connesso: assurdo.

Oss.: Allo stesso modo si dimostra che $[0,1]$ chiuso non è omeomorfo a $]0,1[$ (sempre usando $[0,1] \setminus \{0\}$ e $]0,1[\setminus \{f(0)\}$).

Esempio/esercizio: Un X connesso ma non connesso per archi: il „pettine con la pulce". Abb. $X \subseteq \mathbb{R}^2$:



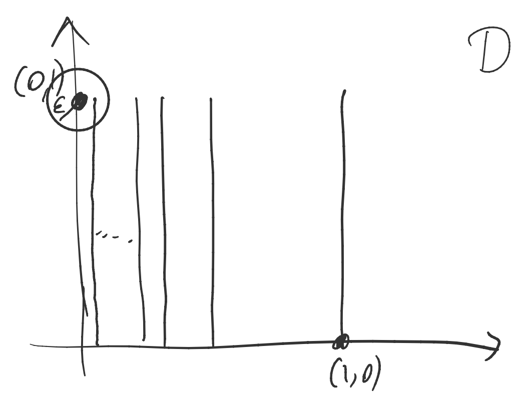
$$X = \left([0,1] \times \{0\}\right) \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z}_{>0} \\ y \in [0,1] \end{array} \right\} \cup$$
$$\cup \{(0,1)\}$$

Dim. che X è connesso. Oss.: $Y = X \setminus \{(0,1)\}$ è connesso per archi, quindi Y è connesso.

Supp. X sconnesso, cioè $X = A \cup B$ disgiunti, aperti, propri.

Per il secondo lemma visto oggi, abb. $Y \subseteq A$ opp $Y \subseteq B$.

Poss. supporre $Y \subseteq A$. Visto che $X = Y \cup \{(0,1)\}$ e $B \neq \emptyset$, allora $B = \{(0,1)\}$, e B non contiene punti di Y. Ma B è aperto in X, quindi contiene $B((1,0), \varepsilon) \cap X$ per qualche $\varepsilon > 0$.



D'altronde esistono sicuramente punti di Y a distanza $< \varepsilon$ da $(0,1)$: assurdo.

Esercizio per casa: dimostrare che X non è connesso per archi.