Geometria 2, Lezione 7

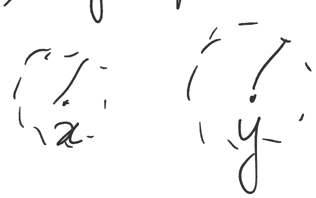
Monday, 15 March 2021 07:31

Spazi topologici di Hausdorff

Sia X spazio topologico

Def.: X si dice di Hausdorff (o $T2$) se due punti distinti qualsiasi hanno intorni disgiunti. Cioè $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists U, V \mid U$ intorno di x, V intorno di y, e $U \cap V = \emptyset$.

Esempio: 1) Ogni spazio metrico è di Hausdorff, infatti siano x, y con $x \neq y$,



Basta prendere $U = B(x, \varepsilon/2)$, $V = B(y, \varepsilon/2)$ dove $\varepsilon = d(x,y)$. Allora $U \cap V = \emptyset$ per la disuguaglianza triangolare.

2) Se X ha topologia banale: allora se $X = \emptyset$ è di Hausdorff, se $|X| = 1$ è di Hausdorff, se $|X| \geq 2$ allora non è di Hausdorff.

3) Se X ha topologia cofinita, allora: se X è un insieme finito allora la topologia è discreta, e allora X è di Hausdorff (basta prendere $U = \{x\}$, $V = \{y\}$), invece se X è infinito allora due aperti non vuoti si intersecano, e quindi X non è di Hausdorff.

Hausdorff.

Lemma: Se X è di Hausdorff allora i sottoinsiemi finiti sono chiusi.

Dim.: Dimostriamo che $\{x\}$ è chiuso $\forall x \in X$. Sia $y \notin \{x\}$, cioè $y \neq x$.
Scegliamo U, V intorni rispettivamente di x e y t.c. $U \cap V = \emptyset$.
Possiamo assumere V aperto, e scriviamo $V_y = V$ (dipende da y).
Allora $X \setminus \{x\} = \bigcup_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} V_y$ è aperto, per cui $\{x\}$ è chiuso.
Visto che l'unione di un numero finito di chiusi è chiusa, anche tutti i sottoinsiemi finiti di X sono chiusi. $\square$

Proposizione: Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

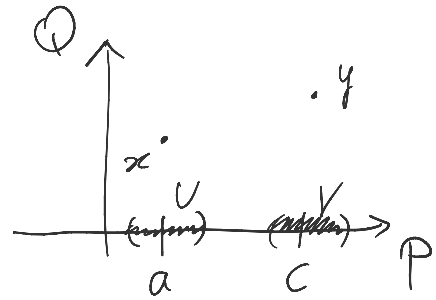
Dim.: Siano X spazio di Hausdorff e $Y \subseteq X$ sottospazio. Siano $x, y \in Y$ con $x \neq y$, allora esistono U, V intorni di x, y rispett. tali che $U \cap V = \emptyset$, e segue:

$$\underbrace{(U \cap Y)}_{\substack{\text{intorno di } x \\ \text{in } Y}} \cap \underbrace{(V \cap Y)}_{\substack{\text{intorno di } y \\ \text{in } Y}} = \emptyset$$

intorno di a in Y ... intorno di y in Y

quindi Y è di Hausdorff. Siano ora P, Q spazi di Hausdorff, e siano $x=(a,b)$, $y=(c,d)$ elementi di $P \times Q$. Supponiamo $x \neq y$, quindi $a \neq c$ oppure $b \neq d$ (oppure entrambe le cose).

Supp. $a \neq c$:



allora esistono intorni U di a, V di c (in P) tali che $U \cap V = \emptyset$. Inoltre $U \times Q$ e $V \times Q$ sono intorni di x e y rispettiv., e $(U \times Q) \cap (V \times Q) = \emptyset$. Se invece $a = c$ allora $b \neq d$ e si fa lo stesso ragionamento con Q invece di P.

$\square$

<u>Teorema</u>: Sia X spazio topologico. Allora X è di Hausdorff se e solo se la <u>diagonale</u>

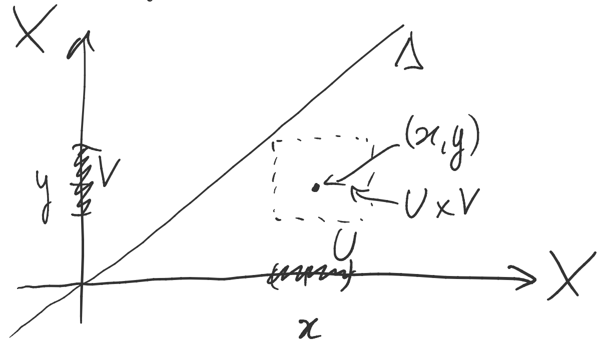
$$\Delta = \{ (x,x) \in X \times X \mid x \in X \}$$

è chiusa in $X \times X$.

<u>Oss.</u>: Il teorema corrisponde all'idea intuitiva che, se X è di Hausdorff,

<u>Oss.:</u> Il teorema corrisponde all'idea intuitiva che, se X è di Hausdorff, allora un $x \in X$ che „varia" non può avvicinarsi arbitrariamente ad un elem. $a \in X$ e <u>anche</u> a un elem. $b \in X$ diverso da a.
Cioè se (x,x) si „avvicina arbitrariam." ad un „limite" (a,b), allora dev'essere $a=b$, cioè $(a,b) \in \Delta$.

<u>Dim.:</u> $\Rightarrow$) Supp. X di Hausdorff, dim. che Δ è chiusa. Sia (x,y) elem. di $(X \times X) \setminus \Delta$, cioè $x \neq y$. Allora esistono due intorni U, V di x e y rispettivamente, con $U \cap V = \emptyset$.

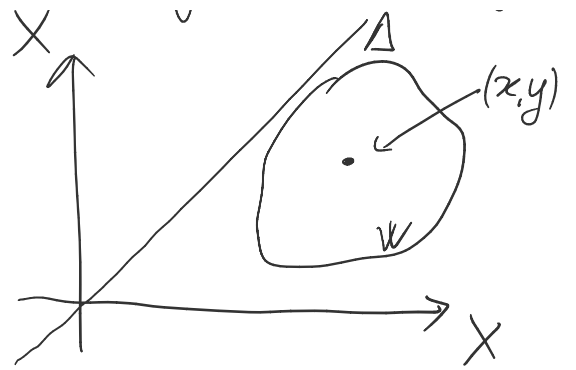


Allora $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, perché se avessi $(a,a) \in \Delta$ con $(a,a) \in U \times V$ allora avrei $a \in U$ e $a \in V$.

Inoltre $U \times V$ è un intorno di (x,y) in $X \times X$ ed è contenuto in $(X \times X) \setminus \Delta$. Segue: $(X \times X) \setminus \Delta$ è intorno di ogni suo punto, cioè è aperto, e Δ è chiusa.

$\Leftarrow$) Supponiamo Δ chiusa, dim. che X è di Hausdorff.
Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Allora $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$,

e sappiamo che $(X \times X) \setminus \Delta$ è



e sappiamo che $(X \times X) \setminus \Delta$ è aperto, cioè intorno di ogni suo punto. Esiste W intorno di (x,y) in $X \times X$ contenuto in $(X \times X) \setminus \Delta$

cioè W contiene un aperto di $X \times X$ contenente (x,y), e allora W contiene anche un aperto del tipo $U \times V$ con $(x,y) \in U \times V$ e U, V aperti di X. Allora U è intorno di x, V è intorno di y, e $\underbrace{U \times V} \subseteq W \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$.

Come prima, concludiamo che $U \cap V = \emptyset$, quindi X è di Hausdorff. $\square$

<u>Corollario:</u> Siano X, Y spazi topologici, e $f, g : X \longrightarrow Y$ continue. Se Y è di Hausdorff, allora

$$C = \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$$

è un chiuso di X.

<u>Oss.:</u> 1) Sia X sp. topologico, e $f : X \to \mathbb{R}$ continua.
con top. euclidea

Allora, fissato $r \in \mathbb{R}$, l'insieme

Allora, fissato $r \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$D = \{x \in X \mid f(x) = r\}$$

è chiuso di X, infatti $\{r\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, e

$$D = f^{-1}(\{r\})$$

2) Siano X, Y spazi topologici, sia $r \in Y$ con $\underline{\{r\} \text{ chiuso}}$ (ad es., se Y è Hausdorff).
Se $f: X \to Y$ è continua, allora $\{x \in X \mid f(x) = r\}$ è chiuso in X.

<u>Dim. del corollario:</u> Consideriamo

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow Y \times Y \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Per la topologia prodotto su $Y \times Y$, l'applicaz. φ è continua, perchè le due componenti f, g sono continue. Inoltre $Y \times Y$ è di Hausdorff, per cui $\Delta = \{(y,y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ è chiusa in $Y \times Y$. E vale:

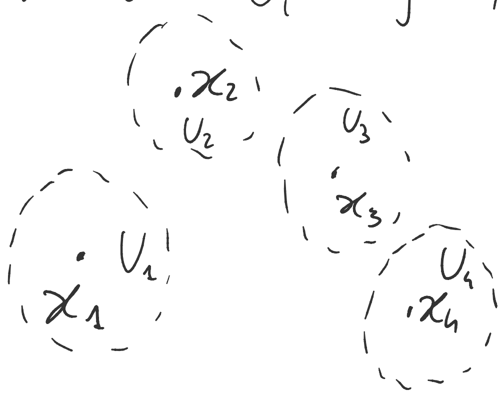
$$C = \varphi^{-1}(\Delta)$$

perchè $\varphi(x) \in \Delta$ se e solo se $f(x) = g(x)$.
Segue: C è un chiuso di X.

$\square$

Lemma: Sia X sp. top. di Hausdorff, e siano $x_1, \ldots, x_n \in X$.
Se $x_1, \ldots, x_n$ tutti distinti, allora $\forall i\ \exists U_i$ intorno di x_i tali che $U_i \cap U_j = \emptyset\ \ \forall i \neq j$.

Dim.:



Per ogni $i \neq j$ scegliamo un intorno U_{ij} di x_i e U_{ji} di x_j tali che $U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$. Per ogni indice i, consid.

$$U_i = \bigcap_{k \neq i} U_{ik}$$

Allora $U_i \cap U_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. $\square$

Es.: Sia $\mathbb{K}$ campo, e consid. $\mathbb{K}^n$ con topologia di Zariski.
E' di Hausdorff? Intanto, tutti i punti di $\mathbb{K}^n$ sono chiusi, infatti se abb. $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, allora $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$ è il luogo degli zeri simultanei dei polinomi $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ (nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$). Come prima, allora anche tutti i sottoinsiemi finiti sono chiusi.
Quindi se $\mathbb{K}$ è un campo finito, allora la topologia di Zariski

Quindi se $\mathbb{K}$ è un campo finito, allora la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^n$ è la top. discreta, e allora $\mathbb{K}^n$ è di Hausdorff.

Invece se $\mathbb{K}$ è un campo infinito, allora $\mathbb{K}^n$ non è di Hausdorff (intuitivamente, come in $\mathbb{R}^2$ con top. di Zariski, aperti non vuoti si intersecano sempre). Per dimostrarlo, consid. prima di tutto $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ con top. di Zariski. Sappiamo che si tratta della topologia cofinita, e allora $\mathbb{K}^1$ non è di Hausdorff.

Inoltre l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^1 &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ a &\longmapsto (a, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

è un'immersione topologica, cioè $\underbrace{}_{\text{è iniettiva}}$ e la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^1$ è la stessa della topologia di sottospazio sull'immagine $\{(*, 0, \dots, 0)\}$.

Cioè l'immagine, con topologia di sottospazio, è omeomorfa a $\mathbb{K}^1$.

Allora $\mathbb{K}^n$ non è di Hausdorff, perché se lo fosse allora sarebbe di Hausdorff anche il sottospazio.