Geometria 2, Lezione 6

Thursday, 11 March 2021 11:12

Def.: Siano X, Y spazi topologici, e sia $f: X \to Y$ continua e iniettiva. L'applicaz. f si dice un'immersione (topologica) se gli aperti di X sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $f^{-1}(A)$ con A aperto di Y.

Oss.: f è un'immersione $\iff$ la restrizione $\tilde{f}: X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ è un omeomorfismo fra X e $f(X)$, quest'ultimo con la topologia di sottospazio.

Esercizio per casa: verificare questa equivalenza.

Esempio:

1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ è un'immersione

2) $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è un'immersione

(dominio: top. euclidea; codominio: top. banale)

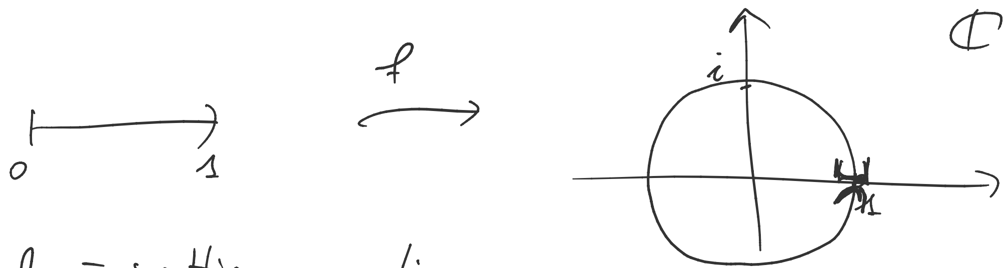
3) $f: [0,1[\to \mathbb{C}$

($[0,1[$: top. euclidea; $\mathbb{C}$: top. euclidea (è def. su $\mathbb{C}^n$ come su $\mathbb{R}^n$))

$2\pi i t$

top. euclidea - top. euclidea (e def. su $\mathbb{C}$ come su $\mathbb{R}^n$)

$$t \longmapsto e^{2\pi i t}$$



f è iniettiva e continua, ma non è un'immersione.

Infatti $[0, \frac{1}{2}[$ è aperto in $[0,1[$, ma $f([0,\frac{1}{2}[)$ non è aperto in $S^1 = Im(f)$. Perché se avessi che $[0,\frac{1}{2}[$ è uguale a $f^{-1}(A)$ per qualche $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, allora avrei che $1 \in A$, e allora un dischetto aperto centrato in 1 sarebbe anche in A, e allora $f^{-1}(A)$ contiene punti arbitrariam. vicini a 1, assurdo.

Prodotti di spazi topologici

Siano P, Q spazi topologici, e consideriamo $P \times Q$. Mettiamo su $P \times Q$ una topologia.

Oss.: Consid. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$: gli insiemi del tipo

asse x asse y

$A \times B$ sono aperti in $\mathbb{R}^2$, ma non tutti gli ap.

ap. di $\mathbb{R}$

$A \times B$ sono aperti in $\mathbb{R}^2$, ma non tutti gli ap.

ap. di $\mathbb{R}$ ap. di $\mathbb{R}$

di $\mathbb{R}^2$ (top. euclidea) sono di questa forma.

Usiamo le proiezioni

$$p : P \times Q \longrightarrow P \qquad \text{e}$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

$$q : P \times Q \longrightarrow Q$$
$$(x, y) \longmapsto y$$

Def.: La <u>topologia prodotto</u> su $P \times Q$ è definita come la topologia meno fine per cui p e q sono continue.

Oss.: Questa top. è ben definita, perché richiedere che p e q siano continue equivale a richiedere che la top. contenga gli insiemi del tipo $p^{-1}(U) = U \times Q$ per ogni $U \subseteq P$ aperto, e gli insiemi del tipo $q^{-1}(V) = P \times V$ per ogni $V \subseteq Q$ aperto.

Es.: Consid. su $\mathbb{R}^2$ la topologia prodotto ottenuta con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dove su ciascuna copia di $\mathbb{R}$ mettiamo la topologia di Zariski. Attenzione: questa non è la topologia di Zariski. <u>Attenzione</u>: questa <u>non è</u> la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$. Infatti sono aperti in $\mathbb{R}^2$ in topologia prodotto gli insiemi del tipo

$$\left(\mathbb{R} \setminus \{\text{numero finito di punti}\}\right) \times \mathbb{R} \quad \text{e}$$

$$\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R} \setminus \{\text{numero finito di punti}\}\right)$$

e gli aperti qualsiasi in topologia prodotto si ottengono facendo unioni arbitrarie e intersezioni finite partendo da insiemi di questo tipo. In questo modo però <u>non si può ottenere</u> l'insieme

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus S^1$$

che è aperto in topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$.
Dimostrarlo formalmente è facile usando il prossimo teorema.

<u>Teorema</u>: 1) $\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \subseteq P \text{ aperto}, V \subseteq Q \text{ aperto}\}$

è una base della topologia prodotto su $P \times Q$.

2) Per ogni $x_0 \in P$ e $y_0 \in Q$ le

2) Per ogni $x_0 \in P$ e $y_0 \in Q$ le applicazioni

$$p\big|_{P\times\{y_0\}} : P\times\{y_0\} \longrightarrow P \qquad \text{e}$$

$$q\big|_{\{x_0\}\times Q} : \{x_0\}\times Q \longrightarrow Q$$

sono omeomorfismi (dove $P\times\{y_0\}$ e $\{x_0\}\times Q$ hanno top. di sottospazio).

3) Le proiezioni $p: P\times Q \to P$ e $q: P\times Q \to Q$ sono applicazioni <u>aperte</u>.

4) Sia X uno sp. topologico, e $f: X \to P\times Q$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "p\circ f"] \arrow[ddr, bend right, "q\circ f"'] & & \\
& P\times Q \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & P \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Allora f è continua se e solo se sono continue $p\circ f$ e $q\circ f$.

Dim.: 1) Verifichiamo prima che esiste una topologia $\mathcal{T}$ di cui $\mathcal{B}$ è una base, verificando le due proprietà già viste:

1) $P \times Q \in \mathcal{B}$, quindi posso ottenere $P \times Q$ come unione di elem. di $\mathcal{B}$.

2) Verif. che intersez. di due elem di $\mathcal{B}$ è unione di elem. di $\mathcal{B}$, quindi siano $U \times V \in \mathcal{B}$ e $U' \times V' \in \mathcal{B}$, cioè $U, U' \subseteq P$ aperti, $V, V' \subseteq Q$ aperti. Allora

$$\left(U \times V\right) \cap \left(U' \times V'\right) = \underbrace{(U \cap U')}_{} \times \underbrace{(V \cap V')}_{}$$

aperti di P e Q rispettivam.

quindi è un elem. di $\mathcal{B}$.

Allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$, confrontiamo $\mathcal{T}$ con la topologia prodotto. Abb.: $p : P \times Q \to P$ è continua se mettiamo su $P \times Q$ la top. $\mathcal{T}$, infatti per ogni ap. $U \subseteq P$ abb. $p^{-1}(U) = U \times Q$ è in $\mathcal{B}$ quindi è ap. per la topologia $\mathcal{T}$. Analogam. vale per q, e allora $\mathcal{T}$ è <u>più fine</u> della topologia prodotto.

Inoltre $\mathcal{B}$ è contenuta nella topologia prodotto, perché

$$\underset{\text{ap. di } P}{U} \times \underset{\text{ap. di } Q}{V} = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

aperti in topologia prodotto

è un aperto in topologia prodotto. Visto che gli elem. di $\mathcal{T}$ sono unioni di elem. di $\mathcal{B}$, abb che $\mathcal{T}$ è <u>meno fine</u> della topologia prodotto. Quindi $\mathcal{T}$ = topologia prodotto, e $\mathcal{B}$ è una base.

2) Vediamo che $\overbrace{p\big|_{P\times\{y_0\}}}^{=\tilde{p}} : P\times\{y_0\} \longrightarrow P$ è un omeomorfismo.

Intanto è biiettiva, poi è continua, perché se $U \subseteq P$ è aperto allora $\tilde{p}^{-1}(U) = U \times \{y_0\} = (\underbrace{U \times Q}_{\text{aperto in } P\times Q}) \cap (P \times \{y_0\})$

è aperto in top. di sottospazio.

Verifichiamo che l'inversa è continua, prendendo una base della top. di sottospazio:

$$\mathcal{B}' = \left\{ (U \times V) \cap (P \times \{y_0\}) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \subseteq P \text{ aperto} \\ V \subseteq Q \text{ aperto} \end{array} \right\}$$

è una base della top. di $P \times \{y_0\}$.

Abb

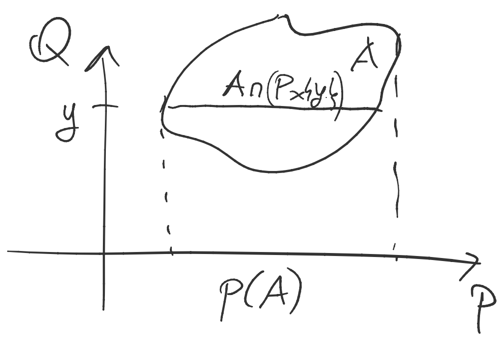
è una base della top. di $P\times\{y_0\}$.

Abb.: $$(U\times V)\cap(P\times\{y_0\})=\begin{cases}\emptyset & \text{se } y_0\notin V\\ U\times\{y_0\} & \text{se } y_0\in V\end{cases}$$

Allora $$(\tilde{p}^{-1})^{-1}\big((U\times V)\cap P\times\{y_0\}\big)=\begin{cases}\emptyset & \text{se } y_0\in V\\ U & \text{se } y_0\in V\end{cases}$$

è aperto in P. Cioè anche $\tilde{p}^{-1}$ è continua, e p è un omeomorfismo.

3)



Sia $A\subseteq P\times Q$ aperto.

Allora $$A=\bigcup_{y\in Q}\underbrace{A\cap(P\times\{y\})}_{\text{non necessariam. aperto in } P\times Q\,!}$$

e vale
$$p(A)=\bigcup_{y\in Q}p\big(A\cap(P\times\{y\})\big)=$$

$$= \bigcup_{y\in Q} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{omeom.} \\ P\times\{y\}\to P}}{p|_{P\times\{y\}}} \Big(\underbrace{A \cap (P\times\{y\})}_{\substack{\uparrow \\ \text{aperto di } P\times\{y\}}} \Big)$$

è unione di aperti di P per il punto 2).
Allora p è aperta. La dim. per q è analoga.

4)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "p\circ f"] \arrow[ddr, bend right, "q\circ f"'] & & \\
& P\times Q \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & P \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Se f è continua allora $p\circ f$ e $q\circ f$ sono continue.
Viceversa, supp. $p\circ f$ e $q\circ f$ continue, verifichiamo che f è continua, verifichiamo che $f^{-1}(A)$ è aperto $\forall A\in\mathcal{B}$.
$A = U\times V$ come prima, e

$$f^{-1}(U\times V) = \underbrace{(p\circ f)^{-1}(U)}_{\uparrow} \cap \underbrace{(q\circ f)^{-1}(V)}_{\uparrow}$$

aperti di X

è un aperto di X. $\square$

<u>Es.</u>: 1) La top. prodotto $\underset{\text{top. euclidea}}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ è la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, grazie all'esercizio che diceva: i rettangoli aperti e i dischi aperti sono basi di una stessa topologia.
Infatti i rettangoli aperti sono base della top. prodotto (unendoli ottengo $\mathcal{B}$ come nel teorema), e i dischi aperti sono base della top. euclidea

2) Usando il teorema è facile dim. che la top. prodotto delle top. di Zariski su $\mathbb{R}$ <u>non è</u> la top. di Z. su $\mathbb{R}^2$, infatti

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2=1\} \quad \text{non è unione}$$

di insiemi del tipo

$$(\mathbb{R} \setminus \{\text{num. finito di punti}\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{\text{numero finito di punti}\})$$