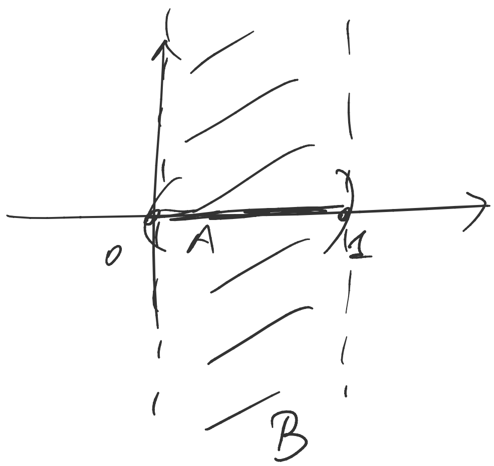
Sottospazi topologici

Def.: Sia X spazio topologico, e $Y \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi. La topologia su X induce la topologia di sottospazio su Y, definita come: $A \subseteq Y$ è aperto se e solo se esiste $B \subseteq X$ aperto tale che $B \cap Y = A$.

Es.: Siano $X = \mathbb{R}^2$ con top. euclidea, e $Y = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Allora identifichiamo Y con $\mathbb{R}$, e abb. che la top. di sottospazio di Y come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è proprio la topologia euclidea su $\mathbb{R}$: ad es. $]0,1[\subseteq \mathbb{R}$ corrisp. al sottoinsieme $A =]0,1[\times \{0\} \subseteq Y$



ed è aperto in topologia di sottospazio, perché ad es.

$$A = \Big(\underbrace{]0,1[\times \mathbb{R}}_{B}\Big) \cap Y$$

$\mathcal{T}_Y$

B

Oss.: Verifichiamo che la topologia di sottospazio $\mathcal{T}_Y$ è effettivam. una topologia:

A1) dobb. avere $\emptyset \in \mathcal{T}_Y$ e $Y \in \mathcal{T}_Y$, ed è vero perché $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ap. in } X}}{\emptyset} = \emptyset \cap Y$, $Y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ap. in } X}}{X} \cap Y$.

A2) Siano $A_i \in \mathcal{T}_Y$ con $i \in I$, verif. che $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_Y$. Abbiamo: esistono aperti B_i di X tali che $A_i = B_i \cap Y$ $\forall i$, quindi

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)}_{\text{aperto in } X} \cap Y$$

quindi $\bigcup_{i \in I} A_i$ è in $\mathcal{T}_Y$.

A3) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_Y$, verifichiamo che $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_Y$

Prendiamo B_1, B_2 ap. in X t.c. $A_i = B_i \cap Y$, allora

$$A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = (B_1 \cap B_2) \cap Y$$

$$A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\text{ap. di } X} \cap Y.$$

<u>Oss.:</u> Sia $C \subseteq Y$ chiuso in top. di sottospazio (per brevità: <u>C chiuso in Y</u>). Allora $C = Y \setminus A$ ← aperto in Y

ed esiste $B \subseteq X$ aperto in X tale che $A = Y \cap B$

Segue:
$$C = Y \setminus (Y \cap B) = Y \setminus B =$$
$$= Y \cap \underbrace{(X \setminus B)}_{\text{chiuso di } X}$$

Da questo segue: $C \subseteq Y$ è chiuso in $Y \iff \exists D \subseteq X$ chiuso in X tale che $C = D \cap Y$.

<u>Esempi:</u> $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1]$

↑ con topologia euclidea

Abb.: $[0,1]$ non è un aperto di X. Però

$[0,1] \subseteq Y$, ed <u>è un aperto</u> di Y.

$[0,1] \subseteq Y$, ed è un aperto di Y.

Anche $[0, \frac{1}{2}[$: non è aperto in X, ma è contenuto in Y ed è un aperto di Y.

Oss.: Sia $\mathcal{B}$ base della top. su X, allora

$$\mathcal{B}' = \{ B \cap Y \mid B \in \mathcal{B} \}$$

è una base della topologia su Y. (Verifica: esercizio)

Oss.: Consideriamo l'inclusione di Y in X

$$\iota : Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto y$$

Mettiamo come al solito su Y la top. di sottospazio. Allora ι è continua, infatti sia A aperto. Allora

$\iota^{-1}(A) = A \cap Y$, che è aperto in topologia di sottospazio.

Inoltre, la topologia di sottospazio su Y è la meno fine per cui ι è continua. Quindi avrei anche potuto definire la topologia di sottospazio in questo modo.

Es.: $X=\mathbb{R}$ con topologia euclidea, $Y=\mathbb{Z}$.

Per ogni $n\in\mathbb{Z}$ esiste un ap. in X, ad es. $B = \left]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right[$ tale che $\{n\} = B \cap \mathbb{Z}$.

Allora la topologia di sottospazio è la topologia discreta.

Es.: $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{Q}$

con top. euclidea

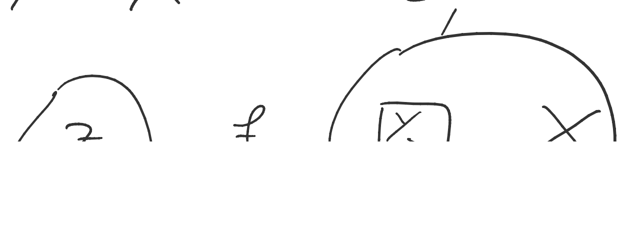
Una base della top. di sottospazio è ad es.

$$\{\,]a,b[\cap \mathbb{Q} \mid a,b\in\mathbb{R} \,\}$$

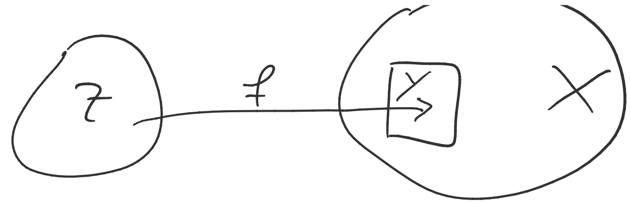
perché $\{\,]a,b[\mid a,b\in\mathbb{R} \,\}$ è una base della top. euclidea su $\mathbb{R}$.

Esercizio per casa: Anche $\{\,]a,b[\cap \mathbb{Q} \mid a,b\in\mathbb{Q} \,\}$ è una base della top. di prima.

Proposizione: Siano Z, X spazi topologici e $Y\subseteq X$ con top. di sottospazio. Sia $\iota: Y \to X$ inclusione, e $f: Z \to Y$.



e $f: Z \to Y$.



Allora f è continua se e solo se $\iota \circ f : Z \to X$ è continua.

Dim.: $\Rightarrow$) ovvio perché ι e f sono continue.

$\Leftarrow$) Sia $A \subseteq Y$, verifichiamo che $f^{-1}(A)$ ap. in Z. Consid. $B \subseteq X$ aperto in X tale che $A = B \cap Y$. Allora

$$\underbrace{(\iota \circ f)^{-1}(B)}_{\text{aperto in } Z} = f^{-1}(\underbrace{\iota^{-1}(B)}_{= B \cap Y}) = f^{-1}(A)$$

Quindi f è continua. $\square$

Sia X spazio topologico, e $Y \subseteq X$ con top. di sottospazio. Sia $Z \subseteq Y$, vogliamo confrontare la chiusura di Z in Y (cioè come sottoins. dello sp. top. Y), e la chiusura di Z in X.

Es.: $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, $Y =]0, 2[$.

Y non è chiuso in $\mathbb{R}$, ma è chiuso in Y.

Y non è chiuso in $\mathbb{R}$, ma è chiuso in Y.

Sia $Z =]0,1[$. Allora la chiusura in $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ di Z è $[0,1]$. Invece la chiusura $\underline{\text{in } Y}$ di Z è $]0,1]$.

Però $\underbrace{]0,1]}_{\text{chiusura in } Y} = \underbrace{[0,1]}_{\text{chiusura in } X} \cap Y$

<u>Lemma:</u> La chiusura di Z in Y è uguale all'intersez. di Y con la chiusura di Z in X.

<u>Dim.:</u> (chiusura di Z in Y) $= \bigcap\limits_{\substack{C \subseteq Y \text{ chiuso} \\ C \supseteq Z}} C =$

per ogni C siffatto, <u>scegliamo</u> $D \subseteq X$ chiuso in X tale che $C = D \cap Y$

$= \bigcap\limits_{\substack{C \subseteq Y \text{ chiuso} \\ C \supseteq Z,\ D \text{ scelto} \\ \text{come chiuso di } X}} D \cap Y = \bigcap\limits_{\substack{D \subseteq X \\ D \text{ chiuso} \\ D \supseteq Z}} D \cap Y =$

$C \subseteq Z$, $\bar{D}$ scelto come chiuso di X tale che $D \cap Y = C$ | $\bar{D}$ chiuso $D \supseteq Z$ (attenzione)

$$= \underbrace{\left(\bigcap_{\substack{D \subseteq X \\ D \text{ chiuso} \\ D \supseteq Z}} D \right)}_{\text{è la chiusura di } Z \text{ in } X.} \cap Y$$

$\square$

<u>Es.</u>: $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{Z}$, $Z = \mathbb{Z}$.

Allora <u>non vale</u> che la parte interna di Z in Y è uguale alla parte interna di Z in X intersecata con Y:

Infatti (parte interna di Z <u>in Y</u>) $= Z$

(parte interna di Z <u>in X</u>) $= \emptyset$

<u>Lemma</u>: Siano $X \supseteq Y \supseteq Z$ come prima. Allora:

1) Se Y è aperto in X allora: Z è aperto in Y se e solo se Z è aperto in X.

se e solo se Z è aperto in X.

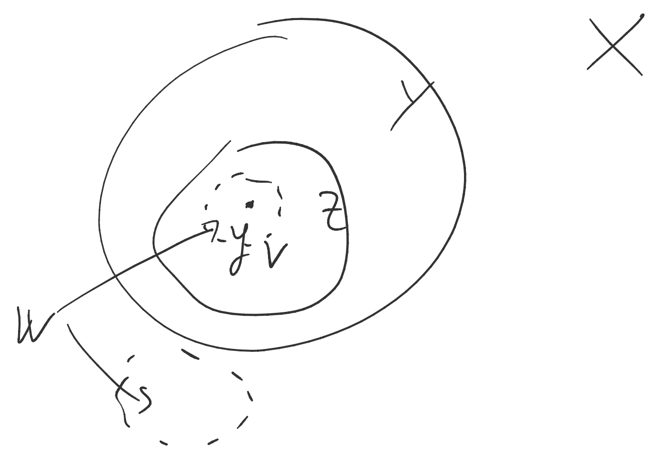
2) Se Y è chiuso in X allora: Z è chiuso in Y se e solo se è chiuso in X.

3) Sia $y \in Y$, e supp. che Y sia un intorno di y in X. Allora Z è un intorno di y in Y se e solo se Z è un intorno di y in X.

<u>Dim.:</u> 1), 2): esercizio per casa.

3) Sia Y intorno di y in X. Cioè $\exists\, U \subseteq X$ aperto in X con $y \in U \subseteq Y$. Dim. l'equivalenza.

$\Rightarrow$) Supp. Z intorno di y in Y, cioè $\exists\, V \subseteq Y$ aperto in Y tale che $y \in V \subseteq Z$.



Esiste $W \subseteq X$ aperto di X tale che $V = W \cap Y$.

Allora $U \cap W$ è aperto di X, e vale:

$$y \in U \cap W = U \cap W \cap Y = U \cap V \subseteq Z$$

Segue: Z è intorno di y anche in X.

$\Leftarrow$) Supp. Z intorno di y in X, cioè $\exists V$ aperto in X tale che $y \in V \subseteq Z \; (\subseteq Y)$.

Allora V è anche aperto <u>in Y</u>, e segue che Z è intorno di y anche in Y.

<u>Esempi ed esercizi</u>

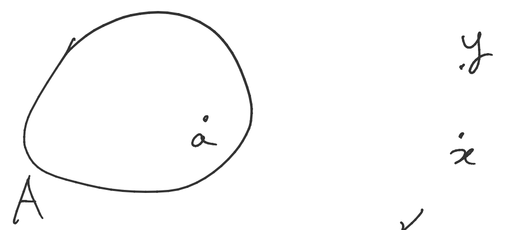
<u>Esercizio</u>: (X, d) spazio metrico. Sia $A \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi. Sia $x \in X$, supp. $A \neq \emptyset$, e definiamo

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Dimostrare che
$$d(-, A) : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto d(x, A)$$
è continua.

<u>Svolgimento</u>: Da verificare: $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,/\,$ se $d(x,y) < \delta$ allora $|d(x, A) - d(y, A)| < \varepsilon$

Immaginiamo x e y „vicini", e confrontiamo $d(x,a)$ con $d(y,a)$ per un qualsiasi $a \in A$.



Abbiamo: $\boxed{d(y,a)} \le \boxed{d(x,a)} + d(x,y)$

(cioè $d(y,a) - d(x,a) \le d(x,y)$)

Segue: $d(y,A) \le d(x,A) + d(x,y)$

(esercizio per casa: dimostrare questa disuguaglianza)

e allora $d(y,A) - d(x,A) \le d(x,y)$

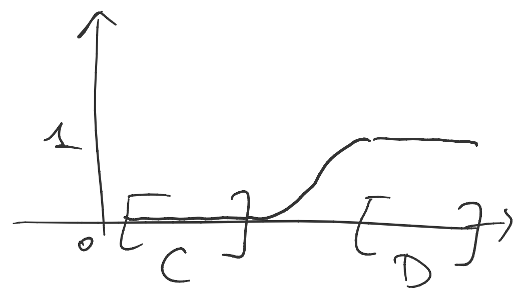
Scambiando x e y ottengo $d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y)$

cioè
$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

Allora basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ per avere la continuità.

<u>Esercizio per casa</u>: X spazio metrico, e siano $C, D \subseteq X$ chiusi con $C \cap D = \emptyset$. Dimostrare che

chiusi, con $C \cap D = \emptyset$. Dimostrare che esiste $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tale che $C = f^{-1}(0)$, $D = f^{-1}(1)$.



<u>Def.</u>: Sia X sp. topologico, $Y \subseteq X$. Se la topologia di sottospazio su Y è la topologia discreta, allora Y si dice <u>discreto</u> (in X).

<u>Esercizio</u>: Vero o falso?

1) La chiusura di un sottoinsieme discreto è discreta.

2) Ogni sottoinsieme discreto è chiuso.

<u>Svolgimento</u>: $\left\{ \frac{1}{n} \mid n > 0, n \in \mathbb{Z} \right\} = A$

E' un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}$.

Però non è chiuso in $\mathbb{R}$, quindi la risposta a 2) è <u>NO</u>.

Inoltre $\bar{A} = \{0\} \cup A$. Però $\bar{A}$ <u>non è</u> discreto, perché se lo fosse allora $\{0\}$ sarebbe aperto in $\bar{A}$, ma non esiste alcun aperto B di $\mathbb{R}$ tale che $B \cap \bar{A} = \{0\}$.

Quindi anche la risposta a 1) è <u>NO</u>.

<u>Esercizio per casa:</u> $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ con topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{R}$ con top. euclidea

$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$ con top. di sottosp. indotta da $\mathbb{R}^2$ con top. euclidea

Consid. $f : X \to Y$

$$t \mapsto (t^2 - 1,\ t^3 - t)$$

<u>Dimostrare:</u> 1) f continua, biiettiva

2) f non è chiusa

3) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $(\ )$ $\ni t$ tale che

3) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $U^{(1)}$ tale che $f|_U : U \to f(U)$ è un omeomorfismo.

<u>Esercizio</u>: Sia X spazio topologico, sia $Z \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi. Z si dice <u>localmente chiuso</u> se

$\forall z \in Z$ $\exists U_z \subseteq X$ aperto di X tale che

$U_z \ni z$ e $Z \cap U_z$ è chiuso in U_z.

Dimostrare che sono equivalenti:

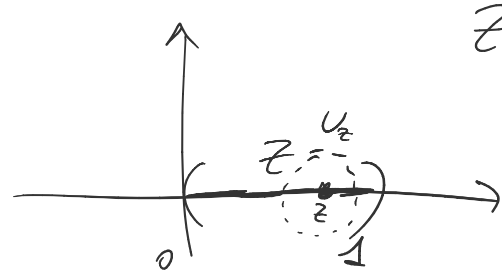
1) Z è localmente chiuso

2) Z è aperto nella sua chiusura

3) Z è l'intersezione di un aperto e di un chiuso.

Ad esempio

$Z =]0,1[\times \{0\}$



Z non è chiuso in $\mathbb{R}^2$ però è localm. chiuso in $\mathbb{R}^2$.
in top. euclidea

(per casa, ma lo vedremo martedì prossimo).