Geometria 2, Lezione 37

Tuesday, 15 June 2021 12:08

Esercizio già dato: Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, definiamo

$$A' = \{ a + (\cos(t), \sin(t)) \mid a \in A, \ t \in [0, \|a\|] \}$$

1) Già fatto.

2) Dimostrare che se A è chiuso anche A' è chiuso

Svolgimento: Sia $p \in \overline{A'}$. Allora esiste una successione $b : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to A'$ che tende a p. D'altronde ogni b_n è del tipo

$$b_n = a_n + (\cos(t_n), \sin(t_n))$$

per elem. $a_n \in A$, $t_n \in [0, \|a_n\|]$.

Visto che b_n converge a p, la successione è limitata, e allora la succ. a_n è limitata. Segue: esiste una sottosucc. convergente a_{n_k}, e il limite q è in A perché A è chiuso. Anche la successione $k \mapsto t_{n_k}$ è limitata, ammette una sottosucc. convergente $m \mapsto t_{n_{k_m}}$.

Allora $a_{n_{k_m}}$ converge sempre a $q \in A$, d'altronde

$$0 \leq t_{n_{k_m}} \leq \|a_{n_{k_m}}\|$$

$$0 \leq t_{n_{k_m}} \leq \| a_{n_{k_m}} \|$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \leq s \leq \|q\|$$ allora $s \in [0, \|q\|]$, quindi

$q + (\cos(s), \sin(s))$ appartiene ad A', ed è anche il limite di $b_{n_{k_m}}$, era il punto p. Quindi $p \in A'$. $\square$

<u>Esercizio:</u> Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto, e consid. la somma

$$f: \mathbb{R}^2 \times K \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a, b) \longmapsto a+b$$

Dimostrare che è un'applicazione chiusa.

<u>Svolgimento:</u> Vogliamo usare il fatto che la proiezione

$$\mathbb{R}^2 \times K \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2$$
$$(c, d) \longmapsto c$$

è chiusa, perché K è compatto. Usiamo

$$\mathbb{R}^2 \times K \xrightarrow{q} \mathbb{R}^2 \times K$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2\times K &\xrightarrow{q} \mathbb{R}^2\times K \\ (a,b) &\longmapsto (a+b,b) \end{aligned}$$

Allora $f = p \circ q$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2\times K \longrightarrow \mathbb{R}^2\times K &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \longmapsto (a+b,b) &\longmapsto a+b \end{aligned}$$

D'altronde q è un omeomorfismo, la sua inversa è $(c,d) \mapsto (c-d,d)$.
Allora entrambe p, q sono chiuse, quindi f è chiusa. $\square$

<u>Esercizio</u> Sia $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$, e consid. $G \subseteq Omeo(D)$

$G = \{ Id_D, \sigma \}$ dove $\sigma : D \to D$, $z \mapsto -z$.

Dimostrare che D/G è omeomorfo a D.

<u>Svolgimento:</u> Consideriamo $D \xrightarrow{\pi} D/G$, $z \longmapsto [z] = \{z, -z\}$. Confrontiamo π

con l'applicazione $f : D \to D$, $z \mapsto z^2$. Allora f „identifica fra loro"

z e $-z$ proprio come fa π, cioè f e π hanno le stesse fibre. Allora f passa al quoziente:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & D \\ D/G \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

esiste $g: D/G \to D$ continua tale che $f = g \circ \pi$.

Inoltre g è una biiezione, perché f e π hanno le stesse fibre. Abb. anche D/G è compatto (immagine di D, che è compatto) e D è di Hausdorff, segue: g è omeomorfismo. $\square$

<u>Esercizio:</u> Sia $A \subseteq M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici diagonalizzabili. Dire se:

1) A è compatto,
2) A è connesso,
3) A è chiuso.

<u>Svolgimento:</u> 1) A non è limitato, ad es. $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in A \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Quindi A non è compatto.

Quindi A non è compatto.

2) A è connesso per archi, infatti se $M \in A$ è diagonalizzabile allora anche $t \cdot M$ è diagonalizzabile

$$\Big(\underset{\text{invertibile}}{M = B} \cdot \underset{\text{diagonale}}{D} \cdot B^{-1}, \qquad tM = B \cdot \underbrace{tD}_{\text{diagonale}} \cdot B^{-1} \Big)$$

e allora il cammino $t \mapsto t \cdot M$ va dalla matrice nulla fino a M ed è contenuto in A.

3) Cerchiamo delle matrici non diagonalizzabili, perché hanno autovalori in $\mathbb{R}$ ma molteplicità geometriche troppo basse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{non è diagonalizzabile.}$$

Però basta cambiare di pochissimo le entrate sulla diagonale per avere una matrice diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{è diagonalizzabile } \forall \varepsilon \neq 0$$ (ha $2 = n$ autovalori distinti). Segue che A non è chiuso.

Esercizio per casa: Sia X uno spazio topologico, $f, g : X \to \mathbb{R}$ continue, $A \subseteq X$. Sia $c \in \overline{A}$ e supponiamo continue, $A \subseteq X$. Sia $c \in \overline{A}$, e supponiamo che $f(a) \leq g(a)$ $\forall a \in A$. Dimostrare che $f(c) \leq g(c)$.

Esercizio per casa: $X = \mathbb{R}$, consideriamo la famiglia di sottoinsiemi

$$\mathcal{B} = \{ [a, b[\mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{R},\ a < b \}$$

1) Dimostrare che esiste una topologia di cui $\mathcal{B}$ è base.

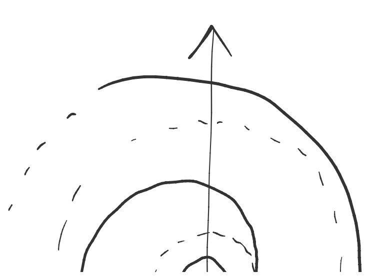
2) Determinare, in questa topologia, la parte interna e la chiusura di $]\frac{1}{2}, 2[$.

3) Determinare se X è di Hausdorff con questa topologia.

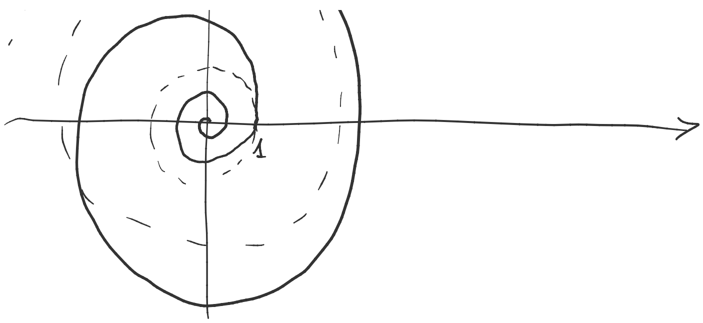
Esercizio: Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ l'applicazione $f(t) = t e^{it}$.

Sia $X =$ l'immagine di f. Calcolare i gruppi fondamentali di X e di $\mathbb{C} \setminus X$.

Svolgimento:



X è una spirale che parte da $0 \in \mathbb{C}$.



Consid. $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (fa ruotare ogni circonferenza

$z \longmapsto z e^{i|z|}$ $|z| = \text{cost.}$ su se stessa)

Questo è un omeomorfismo, con inversa $\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

$w \longmapsto w e^{-i|w|}$

Φ „avvolge $\mathbb{C}$ su se stesso" in modo simile al comportamento di f, quindi Ψ si può usare per „svolgere" la spirale X:

$$\Psi(X) = \{ \Psi(t e^{it}) \mid t \in [0, +\infty[\}$$

e $\Psi(t e^{it}) = t e^{it} e^{-i|t \overbrace{e^{it}}^{\text{ha modulo} = 1}|} = t \cancel{e^{it}} \cancel{e^{-it}} = t$

cioè $\Psi(X) = [0, +\infty[$ (come sottoinsieme di $\mathbb{C}$):

$\Psi(X)$ è convesso quindi semplicemente connesso, allora anche X.

$\mathbb{C} \setminus \Psi(X)$ è <u>stellato</u> cioè c'è un punto (ad es. $-1 \in \mathbb{C}$) tale che $\forall p \in \mathbb{C} \setminus \Psi(X)$ il segmento da p a -1 è tutto contenuto in $\mathbb{C} \setminus \Psi(X)$.

Allora $\mathbb{C} \setminus \Psi(X)$ è contraibile, e allora anche $\mathbb{C} \setminus X$.

<u>Esercizio:</u> Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(t, n) \longmapsto (n + e^t)(1 + in)$$

Sia $X = \mathrm{Im}(f)$, dire se $\mathbb{C} \setminus X$ è contraibile.

<u>Svolgimento:</u> Osserviamo che se t varia in $\mathbb{R}$, e^t varia in $]0, +\infty[$,

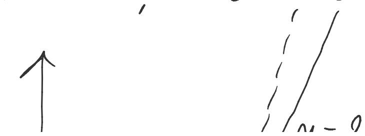
Quindi $\mathrm{Im}(f) = \{ (n + s)(1 + in) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ s \in]0, +\infty[\}$

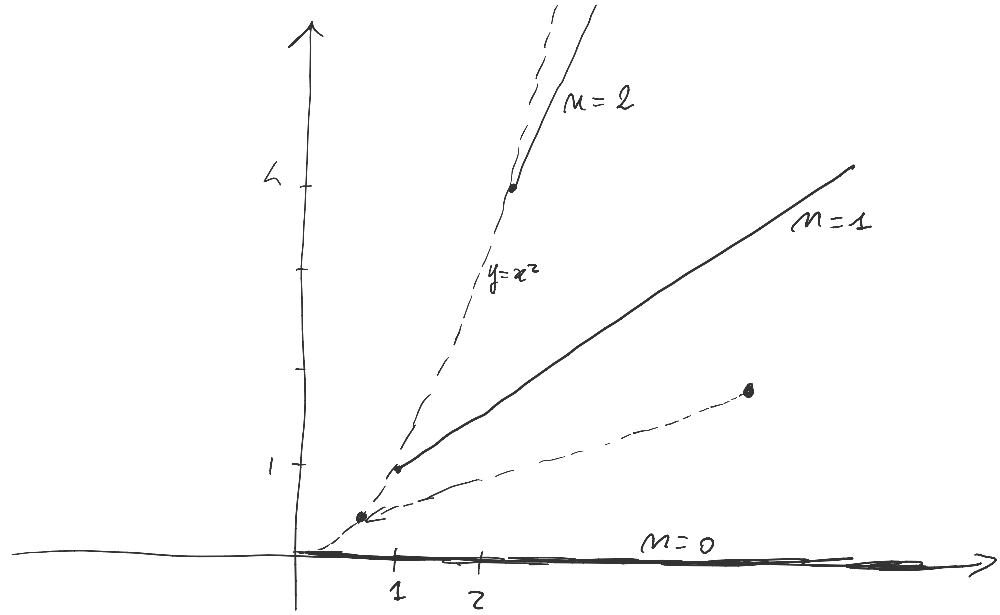
Inoltre $(n+s)(1+in) = (n+s) + i(n \cdot (n+s))$

Per $n = 0$ abbiamo la semiretta $\{ s \mid s \in]0, +\infty[\}$

per $n = 1$ — " — $\{ s+1 + i(s+1) \}$

Per ogni n abbiamo la semiretta $(n+s) + i(n^2 + ns)$, che parte da $n + in^2 \in \mathbb{C}$, con coeff. angolare n;





$\mathbb{C} \setminus X$ sembra contraibile, dimostriamolo.

<u>Primo passo</u>: Cerco di contrarre tutte zone „fra due semirette", facendo percorrere ai punti un segmento che li porta ad arrivare sulla parabola. Il coeff angolare lo prendo $\frac{\text{ordinata}}{\text{ascissa}}$ (che è come succede sulle semirette che compongono X, infatti

$n = \frac{y}{x}$ se $x+iy \in X$, e il punto sulla parabola da cui parte la semiretta che contiene $x+iy$ è $(n, n^2) = \left(\frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^2}\right)$).

Definisco allora una retrazione:

$$(\mathbb{C} \setminus X) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus X$$

$$(x+iy,\ t) \longmapsto \begin{cases} x+iy & \text{se } x \le 0, \text{ oppure } y < 0 \end{cases}$$

$$(x+iy,\ t) \longmapsto \begin{cases} x+iy & \text{se } \begin{cases} x\le 0, \text{ opp. } y\le 0, \\ \text{opp. } x>0, y>0 \text{ ma} \\ y\ge x^2 \end{cases} \\ t(x+iy)+(1-t)\left(\frac{y}{x}+i\frac{y^2}{x^2}\right) & \text{se } x>0, \\ & y>0, \text{ e } y<x^2. \end{cases}$$

E' facile dimostrare che è continua, però va verificato che effettivamente va in $\mathbb{C}\setminus X$, cioè supponiamo che per qualche $x+iy$ abb. $t(x+iy)+(1-t)\left(\frac{y}{x}+i\frac{y^2}{x^2}\right)\in X$. Dimostriamo che $x+iy\in X$, e allora l'applicaz. effettivam. ha immagine contenuta in $\mathbb{C}\setminus X$.

Siano s e n tali che $t(x+iy)+(1-t)\left(\frac{y}{x}+i\frac{y^2}{x^2}\right)=$

$= (s+n)(1+in)$ con $s\in\,]0,+\infty[$, $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$.

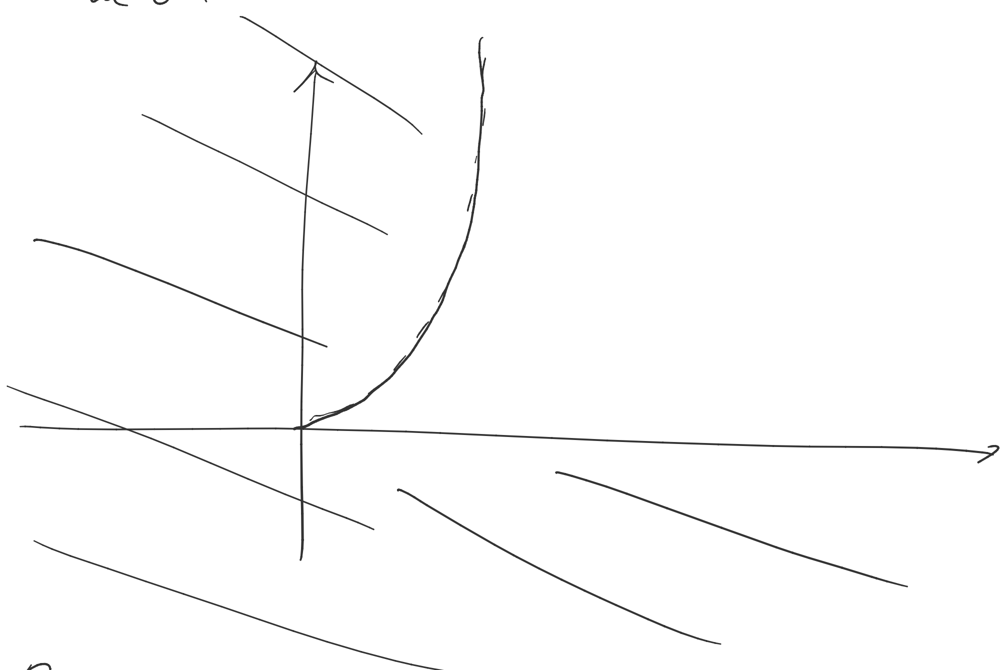
Allora
$$tx+(1-t)\frac{y}{x} = s+n$$
$$ty+(1-t)\frac{y^2}{x^2} = n(s+n)$$

Poniamo $n'=n$, e $s'=x-n'$ e dimostriamo che $x+iy=$ $= (s'+n')(1+in')$.

Abb. $x = s' + n'$, devo verif. che $y = n'(n'+s')$. Abb.

$$\frac{t x + (1-t)\frac{y}{x}}{t y + (1-t)\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{n'}$$

moltiplicando per $\frac{y}{x}$ otteniamo $1 = \frac{1}{n'}\frac{y}{x}$ e allora $y = n'x = n'(n'+s')$. Allora la retrazione è ben definita, e il sottoinsieme è:



Allora $\mathbb{C} \setminus X$ è omot. equivalente a questo sottoinsieme, che è stellato e quindi contraibile. $\square$

<u>Esercizio:</u> Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici.

Supponiamo che

1) f abbia una sezione continua, ovvero che

1) f abbia una sezione continua, <u>oppure</u> che

2) $Y \subseteq X$ e f sia una <u>retrazione</u>.

Dimostrare che in entrambi i casi f è un'identificazione.

<u>Svolgimento:</u> 1) Sia $A \subseteq Y$. Verifichiamo che f è suriettiva, e che $f^{-1}(A)$ è aperto in $X \iff A$ è aperto in Y.

$$\begin{tikzcd} X \supseteq f^{-1}(A) \arrow[d, shift left, "f"] \\ Y \supseteq A \arrow[u, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

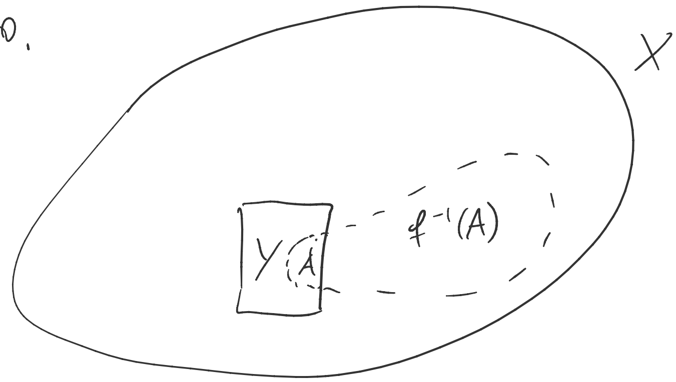
Sappiamo che $f \circ s = Id_Y$. Visto che Id_Y è suriettiva, allora f è suriettiva.

Inoltre se A è ap. in Y allora $f^{-1}(A)$ è aperto in X per continuità. Supponiamo invece $f^{-1}(A)$ sia aperto in X. Segue $s^{-1}(f^{-1}(A))$ è aperto, ma $s^{-1}(f^{-1}(A)) = (f \circ s)^{-1}(A)$ (si verifica immediatamente, anche se s^{-1} e f^{-1} <u>non sono in generale applicazioni</u>), quindi $s^{-1}(f^{-1}(A)) = Id_Y^{-1}(A) = A$. Segue: A è aperto in Y.

2) Ora supponiamo $Y \subseteq X$ e $f : X \to Y$ retrazione (cioè se $x \in Y$ allora $f(x) = x$).

se $x \in Y$ allora $f(x) = x$).

Sia $A \subseteq Y$ sottoinsieme, sappiamo già che se A è aperto allora $f^{-1}(A)$ è aperto. Supponiamo $f^{-1}(A)$ aperto e dimostriamo che A è aperto.



Dimostriamo che $A = f^{-1}(A) \cap Y$.

Verifichiamo le due inclusioni: $\subseteq$) se $a \in A$ allora $a \in Y$. Inoltre è un elem. di X, ed essendo in Y soddisfa $f(a) = a$, cioè $a \in f^{-1}(a)$. Allora $a \in f^{-1}(A)$, quindi $a \in f^{-1}(A) \cap Y$.

$\supseteq$) Supp. $y \in f^{-1}(A) \cap Y$. Cioè $f(y) \in A$, e $y \in Y$ da cui deduciamo $f(y) = y$, cioè $y \in A$.

Quindi in effetti $A = f^{-1}(A) \cap Y$, e allora A è aperto in Y. $\square$

Esercizio: Sia X spazio topologico, e sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita come $x \sim y \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

1) Dimostrare che $x \sim y \iff$ ($\forall A \subseteq X$ aperto, A contiene x se e solo se A contiene y.)

se e solo se A contiene y.)

2) Dimostrare che $X/\sim$ è uno spazio "T_0", cioè dati due punti distinti qualunque a, b, c'è un intorno di a che non contiene b oppure un intorno di b che non contiene a.

Svolgimento: 1) Osserviamo che se $x \sim y$ allora $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Inoltre, dati invece due punti x, y tali che $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$, allora $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$ e $\{y\} \subseteq \overline{\{x\}}$, da questo segue $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ e $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ cioè $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

Allora vale: $x \not\sim y$ se e solo se $x \notin \overline{\{y\}}$ oppure $y \notin \overline{\{x\}}$.

Deduciamo: se $x \not\sim y$ allora c'è un aperto che contiene y ma non x (ed è ad es. $X \setminus \overline{\{y\}}$) oppure c'è un aperto che contiene x ma non y (ad es. $X \setminus \overline{\{x\}}$).

Quindi se x e y sono contenuti esattamente negli stessi aperti, allora $x \sim y$.

allora $x \sim y$.

Supponiamo invece che ci sia un aperto che contiene x ma non y, oppure un aperto che contiene y ma non x. Nel primo caso $\overline{\{y\}}$ è contenuta nel complem. dell'aperto, e allora non contiene x. Nel secondo caso $\overline{\{x\}}$ è cont. nel compl. dell'aperto, e allora non contiene y. Allora $x \not\sim y$.

2) Osserviamo che dalla parte 1) segue che tutti gli aperti di X sono saturi (contenendo un punto, contengono anche tutti i punti equivalenti). Prendiamo ora $a \neq b$ elem. di $X/_\sim$, siano $[x]=a$, $[y]=b$, allora $x \not\sim y$. Per la parte 1), esiste A aperto di X che contiene x ma non y, oppure y ma non x. Allora $\underset{\uparrow \text{ quoziente } X \to X/_\sim}{\pi}(A)$ è un aperto di $X/_\sim$ con la proprietà voluta.

Esercizio: per casa Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia $G \subseteq GL(2,\mathbb{R})$ il sottogruppo generato da $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Determinare per quali valori di a, G agisce in

Determinare per quali valori di a, G agisce in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(Suggerimento: trovare un modo per trattare il caso $a \neq 0$ come se fosse un singolo valore di a.)

<u>Esercizio per casa:</u> Calcolare i gruppi fondamentali di:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x+y-1)=0\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz(x^2+y^2+z^2-1)=0\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in [0,1],\ xyz=0 \text{ e } x+y+z=1\}$$