Geometria 2, Lezione 36

Monday, 14 June 2021 06:43

Esempi ed esercizi

Esercizio già dato: Dire se $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\}$

è una superficie diff. immersa in $\mathbb{R}^3$.

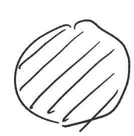
Svolgimento: Risposta: no. Motivo: non ci possono essere carte locali intorno a punti del "bordo" di X, cioè ad. $(1,0,0)$.

Infatti sia $\varphi: U \to W$ carta locale (per assurdo) con $\varphi(q) = (1,0,0)$ per qualche $q \in U$.

Visto che $W \subseteq X \subseteq \{z=0\}$, possiamo considerare $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\varphi: U \to W \subseteq \mathbb{R}^2$ differenziabile con diff. iniettivo in q.

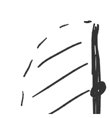
Allora $\mathrm{Im}(\varphi)$ contiene un intorno di $\varphi(q) = (1,0)$, ma X non contiene intorni di $(1,0)$. $\square$

Esercizio: 1) Dire se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^2$.

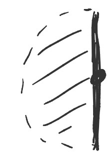


2) Dire se $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1,\ x \leq 0\}$

è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^2$



è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^2$

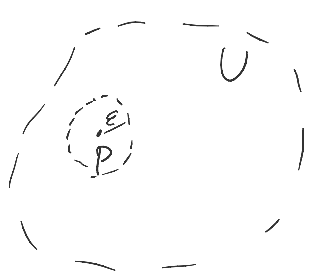


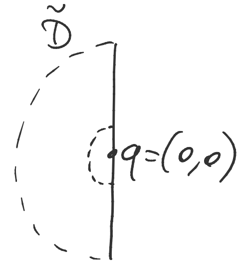
Svolgimento: 1) No, perché D è compatto e non vuoto (gli aperti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ non sono compatti).

2) Risposta è no, ma la dimostrazione non è semplice.

Il problema è sul „bordo" di $\tilde{D}$, concentriamoci ad es. su $(0,0) \in \tilde{D}$.

Sia per assurdo $\varphi: U \to \tilde{D}$ omeomorfismo, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto.





L'idea è che allora $U \setminus \{p\}$ non sembra semplicemente connesso, mentre $\tilde{D} \setminus \{q\}$ è contraibile, quindi semplicemente connesso. Questi due però dovrebbero essere omeomorfi, se esiste φ.

Dimostriamo che $U \setminus \{p\}$ non è semplicem. connesso.

Sia $\varepsilon > 0 \mid B(p, \varepsilon) \subseteq U$, e consideriamo $Y = \{ r \in \mathbb{R}^2 \mid d(p,r) = \frac{\varepsilon}{2} \}$.

Questo insieme è omeomorfo a S^1, ed è un retratto di U.

Questo insieme è omeomorfo a S^1, ed è un retratto di U.

Segue: $\iota_*: \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(\tilde{D})$ è iniettiva, quindi $\pi_1(\tilde{D})$ è non banale. Cioè $U \setminus \{p\}$ non è semplicem. connesso. $\square$

<u>Esercizio dato per casa</u>: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ tale che $A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset$ opp. $X \setminus A$ è finito o numerabile. Dim che $\mathcal{T}$ è una topologia, e che $[0,1] \subseteq X$ non è compatto.

<u>Svolgimento</u>: Che $\mathcal{T}$ sia una topologia si verifica immediatamente, dimostriamo che $[0,1]$ non è compatto. Consideriamo i chiusi di $[0,1]$:

$$K_n = \left\{ \frac{1}{m} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ m \geq n \right\} \qquad \text{per } n \text{ intero} \geq 1.$$

Allora un numero <u>finito</u> di K_n ha sempre intersez. non vuota, cioè dati qualsiasi $n_1, \ldots, n_r$ allora

$$\left([0,1] \setminus K_{n_1}\right) \cup \ldots \cup \left([0,1] \setminus K_{n_r}\right) \neq [0,1]$$

(non ricoprono $[0,1]$). Però l'intersez. di tutti i K_n è vuota, cioè

$$\left([0,1] \setminus K_1\right) \cup \left([0,1] \setminus K_2\right) \cup \ldots\ldots = [0,1]$$

quindi $[0,1]$ non è compatto. $\square$

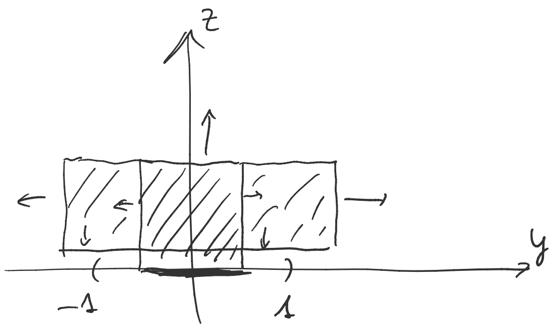
<u>Esercizio già dato:</u> Dim. che $X = \{z > 0\} \cup \left(B(0,1) \times \{0\}\right)$,

$$Y = \{z>0\} \cup \{(x,y,0) \mid x^2+y^2>1\}$$

non sono omeomorfi.

<u>Svolgimento:</u> Prendiamo un'esaustione in compatti di X, cioè una famiglia di compatti $K_n \subseteq X$ tali che $K_n \subseteq K^\circ_{n+1}$, $(\forall n)$ e

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \qquad \left(\text{segue che } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^\circ\right).$$



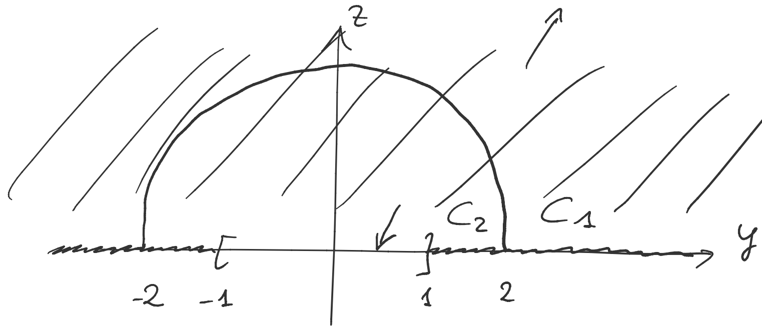
$$K_n = \left\{x^2+y^2 \le 1 - \frac{1}{n},\ 0 \le z \le n\right\} \cup$$
$$\left\{x^2+y^2 \le n\ ,\ \frac{1}{n} \le z \le n\right\}$$

Allora: $X \setminus K_n$ è connesso per archi, quindi è connesso.

Supponiamo per assurdo che X e Y siano omeomorfi, tramite $f: X \to Y$.

Definiamo anche un compatto di Y:

Definiamo anche un compatto di Y:



$$C = \{ p \in Y \mid \|p\| = 2 \} =$$
$$= \{ (x,y,z) \mid \|(x,y,z)\| = 2 \text{ e } z \geq 0 \}$$

C è chiuso e limitato, quindi è compatto. Allora esiste N tale che $f(K_N) \supseteq C$. Allora $f(\underline{X \setminus K_N}) \subseteq Y \setminus C$,

e $Y \setminus C = \underbrace{\{ p \in Y \mid \|p\| > 2 \}}_{= C_1} \cup \underbrace{\{ p \in Y \mid \|p\| < 2 \}}_{= C_2}$

Abb.: $X \setminus K_N$ è connesso, quindi $f(X \setminus K_N) \subseteq C_1$ opp. C_2. Segue $f(K_N) \supseteq C_2$ opp. C_1. Ma $f(K_N)$ è compatto, quindi chiuso e limitato. Allora $f(K_N)$ non può contenere C_1 perché C_1 è illimitato. Quindi $f(K_N)$ contiene C_2, ma anche questo è impossibile perché C_2 contiene successioni da cui non posso estrarre sottosucc. convergenti (ad es. $(0,0,\frac{1}{k})$). Assurdo.

$\square$

<u>Esercizio già dato:</u> $f: X \to Y$, X spazio topologico, Y di Hausdorff,

$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subseteq X \times Y.$$

1) Dimostrare che se f è continua allora G_f è chiuso.

1) Dimostrare che se f è continua allora G_f è chiuso.

2) Dimostrare che se G_f è chiuso e Y è compatto allora f è continua.

<u>Svolgimento</u>: 1) Consideriamo $\varphi: X \times Y \to Y \times Y$. Allora

$$(x, y) \longmapsto (f(x), y)$$

$G_f = \varphi^{-1}(\Delta_Y)$ dove Δ_Y è la diagonale in $Y \times Y$.

Visto che Y è di Hausdorff, Δ_Y è chiusa in $Y \times Y$, e allora G_f è chiuso in $X \times Y$.

2) Sia $V \subseteq Y$ aperto, consideriamo $Y \setminus V$ e la sua controimmagine $f^{-1}(Y \setminus V)$. Dimostriamo che è chiusa, cerchiamo di coinvolgere G_f, e la proiezione $\pi: X \times Y \to X$ (è chiusa). Abb.:

$$f^{-1}(Y \setminus V) = \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus V\} =$$

se poniamo $f(x) = y$ allora $(x, y) \in G_f$

$$= \{x \in X \mid \exists y \in Y \setminus V \mid (x, y) \in G_f\} =$$

$$= \pi(\{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y \setminus V,\ (x, y) \in G_f\}) =$$

$$= \pi\Big(\{(x,y) \mid \underbrace{x \in X,\ y \in Y \setminus V}, \ \underbrace{(x,y) \in G_f}\}\Big) =$$

$$= \pi\Big(\underbrace{\big(X \times \underbrace{(Y \setminus V)}_{\text{chiuso}}\big)}_{\text{chiuso}} \cap \underbrace{G_f}_{\text{chiuso}}\Big) \quad \text{è chiuso in } X.$$

Allora $f^{-1}(Y \setminus V)$ è chiuso in X, e $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$, quindi $f^{-1}(V)$ è aperto, e f è continua.

Esercizio: Sia X spazio topologico, E sottoinsieme denso, $U \subseteq X$ aperto. Dimostrare che

$$\overline{E \cap U} \supseteq U.$$

Svolgimento: Per assurdo, $\overline{E \cap U}$ non contiene U, allora $U \setminus \overline{E \cap U} = V$ è un aperto non vuoto. Visto che E è denso, l'aperto V interseca E:

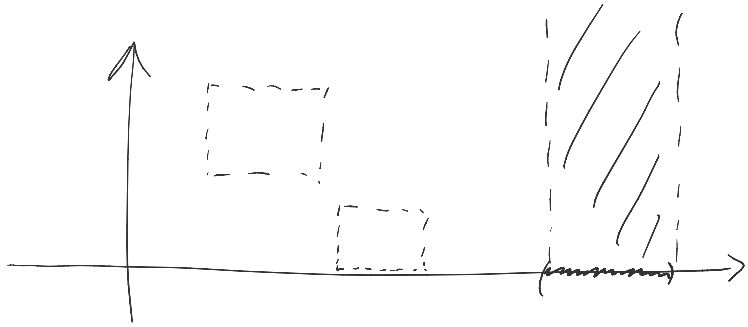
$$E \cap (U \setminus \overline{E \cap U}) = E \cap U \cap (X \setminus \underbrace{\overline{E \cap U}}_{\text{contiene } E \cap U}) \subseteq$$

$$(E \cap U) \cap (X \setminus (E \cap U))$$

è vuoto, ma non dovrebbe esserlo perché E interseca V: assurdo. □

Esercizio: Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di sottoinsiemi di $X = \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ dati da:

$$\mathcal{B} = \{]a,b[\times]c,d[\mid a<b,\ c<d \text{ tutti in } \mathbb{R} \} \cup \{]a,b[\times [0,+\infty[\mid a<b \text{ reali} \}$$



1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia.

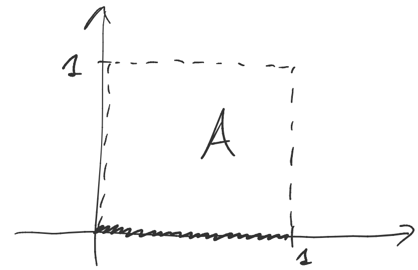
2) Determinare la parte interna di $A =]0,1[\times [0,1[$ e la chiusura di $C = \{(0,1)\}$.

3) Dimostrare che X è connesso ma non compatto, né di Hausdorff.

4) Dimostrare che $Y = [0,1] \times [0,1]$ è compatto (in top. di sottospazio.

Svolgimento: 1) Si dim. facilmente che $X = \bigcup_{D \in \mathcal{B}} D$ e che l'intersez. di due elem. di $\mathcal{B}$ è unione di elem. di $\mathcal{B}$, quindi $\mathcal{B}$ è base di una topologia.

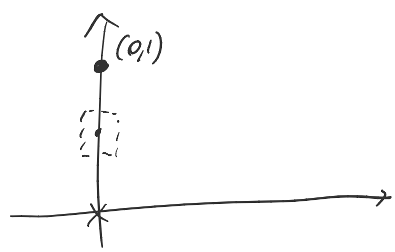
base di una topologia.

2) 

$A^\circ =$ il più grande aperto contenuto in A.

A° è unione di elem. di $\mathcal{B}$, e solo gli ins. del tipo $]a,b[\times]c,d[$ fra quelli di $\mathcal{B}$ sono contenuti in A. Da questo segue che nessun punto sull'asse x è in A°. D'altronde tutti gli altri di A ci sono, perché $]0,1[\times]0,1[$ è esso stesso in $\mathcal{B}$. Quindi $A^\circ =]0,1[\times]0,1[$.

Consid. $C=\{(0,1)\}$



Per calcolare $\overline{C}$ trovo il più piccolo chiuso contenente C, o il più grande aperto contenuto in $X\setminus C$ (il complementare allora sarà $\overline{C}$).

Sicuramente, prendendo strisce verticali del tipo $]a,b[\times[0,+\infty[$ ottengo tutti i punti del tipo (x,y) con $x\neq 0$ (e $y\geq 0$).

Prendendo rettangoli aperti, ottengo anche tutti i punti del tipo (x,y) con $x=0$ e $y\notin\{0,1\}$.

Ricapitolando: l'interno di $X\setminus C$ contiene $X\setminus\{(0,1),(0,0)\}$.

Ci chiediamo se $(X\setminus C)^\circ$ contiene anche $(0,0)$. Se sì sarebbe

Ci chiediamo se $(X \setminus C)^\circ$ contiene anche $(0,0)$. Se sì, sarebbe un aperto di X contenente $(0,0)$ ma non $(0,1)$. Sarebbe unione di elem. di $\mathcal{B}$, e fra questi ci sarebbe almeno una striscia verticale del tipo $]a,b[\times[0,+\infty[$ con $a<0<b$. Ma questa contiene anche $(0,1)$, quindi $(0,0)$ non può essere in $(X\setminus C)^\circ$. Segue:

$$(X\setminus C)^\circ = X \setminus \{(0,0),(0,1)\} = (X\setminus C)\setminus\{(0,0)\}.$$

Il complementare è $\overline{C}$, cioè $\overline{C} = \{(0,0),(0,1)\}$.

3) X non è di Hausdorff perché ha punti non chiusi, ad es. $(0,1)$.

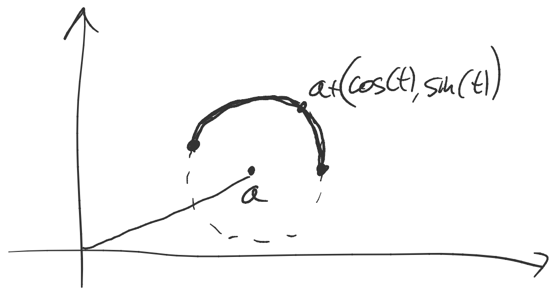
X non è compatto, ad es. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \,]-n,n[\times[0,+\infty[$

e da questo non posso estrarre un sottoricoprim. finito.

Osserviamo che $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia euclidea su X, quindi X è connesso e Y è compatto (lo sono nella topologia euclidea).

<u>Esercizio:</u> Sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$ un sottoinsieme, e definiamo

$$A' = \{a + (\cos(t), \sin(t)) \mid a\in A,\ t\in[0,\|a\|]\}$$



Dimostrare:

1) Se A è compatto, allora A' è compatto.

2) Se A è chiuso, allora A' è chiuso. $\boxed{\leftarrow \text{per casa}}$

<u>Svolgimento di 1)</u>: Scriviamo A' come immagine di un'applicazione continua, con dominio compatto (possiamo usare A e un intervallo chiuso).

Usiamo $[0,1]$ invece che $[0, \|a\|]$:

$$
\begin{aligned}
f : A \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(a, s) &\longmapsto a + \big(\cos(\underbrace{s \cdot \|a\|}_{\text{varia fra } 0 \text{ e } \|a\|}), \sin(s \cdot \|a\|)\big)
\end{aligned}
$$

L'immagine di f è A', e f è continua, quindi A' è compatto. $\square$