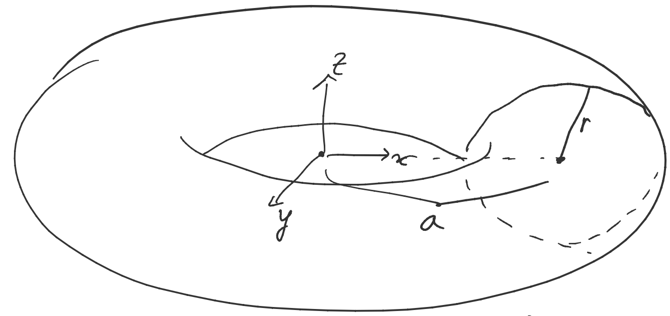
Geometria 2, Lezione 35

Wednesday, 9 June 2021 16:13

Esempi ed esercizi

Esercizio per casa: 1) Toro:



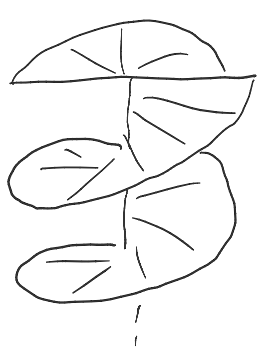
$$\varphi(u,v) = \Big((a + r\cos(u))\cos(v),\ (a + r\cos(u))\sin(v),\ r\sin(u) \Big)$$

Calcolare X_u, X_v, N, E, F, G, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, K,

e determinare di che tipo è il punto $\varphi(u,v)$ al variare di u e v (punto ellittico, parabolico, ...).

2) Elicoide: si parte da $\alpha(u) = (r\cos(u), r\sin(u), \mu u)$ con $r, \mu > 0$ (elica circolare), e si definisce

$$S = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; (x,y) \neq (0,0) \text{ e } \left(\frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right) \in \alpha(\mathbb{R}) \right\}$$



$$\varphi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), \mu u)$$

Calcolare le stesse funzioni.

Esercizio: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. immersa. Se S è contenuta in un piano affine o in una sfera allora tutti i punti sono ombelicali. Dimostrare che vale il viceversa, se S è connessa.

Svolgimento: Tutti i punti sono ombelicali, quindi L_p è un'omotetia

$\forall p$:
$$L_p(X_u) = \lambda(p) X_u$$
$$L_p(X_v) = \lambda(p) X_v$$

Nelle nostre notazioni $L_p(X_u) = N_u$, $L_p(X_v) = N_v$, allora possiamo derivare

$$N_u = \lambda X_u \quad , \quad N_v = \lambda X_v$$

$$(\lambda = \lambda(u,v))$$

ottenendo
$$N_{uv} = \lambda_v X_u + \lambda X_{uv},$$
$$N_{vu} = \lambda_u X_v + \lambda X_{uv},$$

e allora $\lambda_v X_u = \lambda_u X_v$. I vettori X_u, X_v sono linearmente indipendenti, quindi $\lambda_v = \lambda_u = 0$ in ogni punto.

Allora considerando $\lambda : S \to \mathbb{R}$ ottengo λ è localmente

Allora considerando $\lambda : S \to \mathbb{R}$, ottengo λ è localmente costante. Segue che λ è costante perché S è connessa (loc. costante $\Rightarrow$ il luogo dove assume un valore fissato è aperto non vuoto).

Supponiamo $\lambda \neq 0$: Dimostriamo che S è contenuta in una sfera. Candidato centro della sfera: $c = \varphi - \frac{1}{\lambda} N$ (φ = carta locale). Abb.:

$$c_u = X_u - \frac{1}{\lambda} N_u = 0 \,, \quad c_v = X_v - \frac{1}{\lambda} N_v = 0$$

Allora considerando c come funzione $S \to \mathbb{R}^3$, anch'essa è costante, e d'altronde $\|\varphi - c\| = \frac{1}{|\lambda|}$, quindi S è cont. in una sfera.

Supponiamo $\lambda = 0$: Allora $N_u = N_v = 0$, cioè N è costante, calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial u}(\varphi \cdot N) = \underbrace{X_u \cdot N}_{\substack{= \\ 0 \text{ perché} \\ N \text{ è ortogonale} \\ \text{a } T_pS}} + \varphi \cdot N_u = 0$$

e $\frac{\partial}{\partial v}(\varphi \cdot N) = 0$.

Uguale ad a

e $\frac{\partial}{\partial v}(\varphi \cdot N) = 0$.

uguale ad a

Allora la funzione $\begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ p \longmapsto p \cdot N \end{array}$ è costante, e

allora $S \subseteq \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p \cdot N = a\}$, che è un piano affine.

<u>Esercizio:</u> Dimostrare che se S è compatta ha almeno un punto ellittico.

<u>Svolgimento:</u> S è chiusa e limitata, allora $\|\cdot\| : S \to \mathbb{R}$ ha un massimo. Sia $p_0 \in S$ punto in cui la norma è massima. Sia $\alpha : I \to S$ curva a vel. unitaria tale che $\alpha(t_0) = p_0$. Considero $\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \|\alpha(t)\|^2 \end{array}$, è C^∞ ed

($\|p_0\| > 0$ altrimenti $S = \{(0,0,0)\}$, assurdo)

ha un massimo in t_0, allora $f'(t_0) = 0$, $f''(t_0) \leq 0$.

Inoltre $f(t) = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$, $f'(t) = 2\alpha(t)\alpha'(t)$,

$$0 \geq f''(t_0) = 2\Big(\underbrace{\alpha(t_0)\alpha''(t_0)} + \underbrace{\alpha'(t_0)\alpha'(t_0)}_{= 1}\Big)$$

Allora $\alpha''(t_0)\cdot\alpha(t_0) \leq -1$

Inoltre $|\alpha''(t_0)\cdot\alpha(t_0)| = -\alpha''(t_0)\cdot\alpha(t_0) \leq \|\alpha''(t_0)\|\cdot\|\alpha(t_0)\|$

Allora $\|\alpha''(t_0)\| \geq \dfrac{1}{\|\alpha(t_0)\|}$. Cioè $\|\alpha''(t_0)\| > 0$ qualsiasi sia α. Allora si può applicare il teorema di Meusnier.

In particolare, assumiamo che α sia ottenuta intersecando S con un piano affine normale a $T_{p_0}S$.

Allora deduciamo che $II_{p_0}(v) > 0$ $\forall v \in T_{p_0}S$ con $\|v\| = 1$ (ponendo $v = \alpha'(t_0)$).

Cioè II_{p_0} è definita positiva, e allora p_0 è ellittico.

<u>Esercizio:</u> Dire quali sono superfici diff. immerse in $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$$

$$\{\ \text{—}\,,\text{—}\quad x \geq 0 \text{ e } x^2 = (y-1)^2 + z^2\}$$

$$\{\ \text{—}\,,\text{—}\quad x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

$$\{\ \text{—}\,,\text{—}\quad x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\} \leftarrow$$

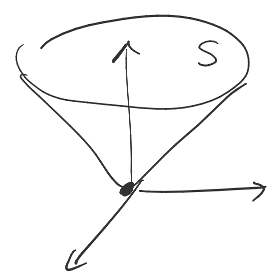
$$\{\ \quad xy = 0\}$$

$$\{\ \text{——},\ \text{——} \qquad xy=0\ \}$$

$$\{\ \text{——},\ \text{——} \qquad xy=0 \ \text{ e } \ x,y\geq 0\ \}$$

(se no, dare una dimostrazione).

<u>Esempio:</u> $S=\{(x,y,z) \mid z=\sqrt{x^2+y^2}\}$



S non è una superficie diff. immersa in $\mathbb{R}^3$, il problema è nell'origine. Ma dire semplicemente "S è definita implicitamente come $f=0$ dove f non è C^∞ nell'origine" non è una dimostrazione!

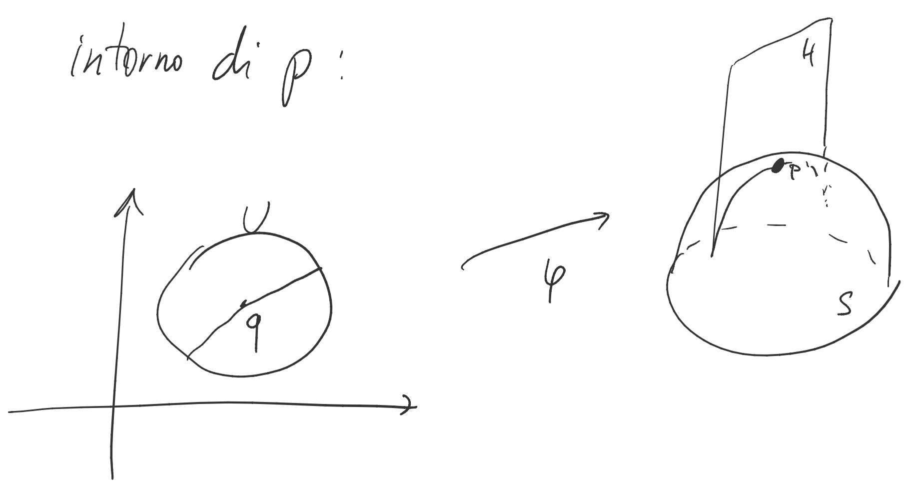
Usiamo invece il fatto che ogni punto deve avere una carta locale di Monge. In questo caso, se S fosse una sup differenziabile, allora anche l'origine avrebbe una carta locale di Monge, cioè sarebbe del tipo $(u,v,g(u,v))$ opp. $(u,g(u,v),v)$ oppure $(g(u,v),u,v)$.

Il secondo e il terzo tipo non sono possibili, perché la proiez. sulla y e la proiez. sulla z non sono iniettive in alcun intorno di $(0,0,0)$ in S, quindi l'unica possibilità <u>sarebbe</u> $(u,v,g(u,v))$

di $(0,0,0)$ in S, quindi l'unica possibilità sarebbe $(u,v,g(u,v))$ e l'unica possibilità per g sarebbe $g(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$, che però non è C^∞.

<u>Osservazione</u>: Nell'esercizio su S compatta è rimasto in sospeso un punto: dovremmo dimostrare che data S e $p\in S$, un qualsiasi piano affine H intersecato con S definisce una curva differenziabile, almeno in un intorno di p.

Per dimostrarlo consid. un'equazione di grado 1 che definisce H: $h(x,y,z)=0$ dove $h(x,y,z)=ax+by+cz+d$ (a,b,c,d fissati). Sia φ carta locale di S in un intorno di p:



La controimmagine di $H\cap S$ in U è definita dall'equazione $h(\varphi(u,v))=0$, voglio applicare il teo. della f.ne implicita su $\mathbb{R}^2$, calcolo il gradiente di $(u,v)\mapsto h(\varphi(u,v))$, impunta su $\mathbb{R}^2$, calcolo il gradiente di $(u,v) \mapsto h(\varphi(u,v))$,

ed è

$$\underbrace{\nabla h}_{\substack{\text{gradiente di } h,\\ \text{vettore riga} \in \mathbb{R}^3}} \cdot \underbrace{J\varphi}_{\substack{\text{m. Jacobiana di } \varphi,\\ 3\times 2, \text{ le sue}\\ \text{colonne sono } X_u \text{ e } X_v}} = \nabla h \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} X_u \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_v \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Se avessi $\nabla(h \circ \varphi) = (0,0)$, allora $\nabla h \cdot X_u = 0$, $\nabla h \cdot X_v = 0$

e avrei ∇h parallelo ad N, cioè H è parallelo a $T_p S$, assurdo.

Quindi la controimmagine di $H \cap S$ è una curva C^∞ in U (in un intorno di $\varphi^{-1}(p)$),

e componendo con φ ottengo $H \cap S$ come curva C^∞ in un intorno di p.

<u>Esercizio:</u> Siano X, Y spazi topologici, $A \subsetneq X$, $B \subsetneq Y$.

Supponiamo X, Y connessi e anche $X \setminus A$ e $X \setminus B$.

Dimostrare che $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ è connesso.

<u>Svolgimento:</u> $$(X \times Y) \setminus (A \times B) = \underbrace{\big((X \setminus A) \times Y\big)}_{\text{connesso} = C_1} \cup \underbrace{\big(X \times (Y \setminus B)\big)}_{\text{connesso} = C_2}$$

Visto che $A \neq X$, $B \neq Y$, esiste $(x,y) \in X \times Y$ tale che visto che $A \neq X$, $B \neq Y$, esiste $(x,y) \in X \times Y$ tale che

$x \notin A$, $y \notin B$, e allora $(x,y) \in C_1 \cap C_2$.

Allora $C_1 \cup C_2$ è connesso.

<u>Esercizio per casa:</u> $X = \mathbb{R}$, definiamo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con:

$A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A = \emptyset$ opp. $X \setminus A$ è (finito o) numerabile.

1) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

2) Dimostrare che $[0,1]$ con top. di sottospazio non è compatto.

<u>Esercizio per casa:</u> In $\mathbb{R}^3$ (topologia euclidea):

$$X = \left(\underbrace{B(0,1)}_{\text{in } \mathbb{R}^2} \times \{0\} \right) \cup \{(x,y,z) \mid z > 0\}$$

$$Y = \{(x,y,z) \mid z = 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(x,y,z) \mid z > 0\}$$

Dimostrare che X e Y non sono omeomorfi.

(Suggerimento: usare un'esaustione in compatti di X.)