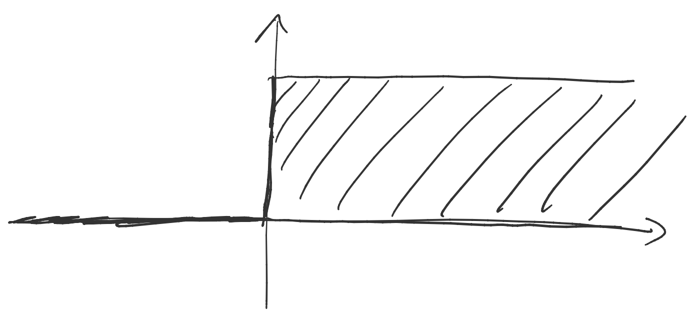
Geometria 2, Lezione 34

Wednesday, 9 June 2021 14:18

Esempi ed esercizi

Esercizio: Consid. la proiezione $p : P \times Q \to P$, è un'applicazione aperta ma non sempre chiusa (P, Q spazi topologici).

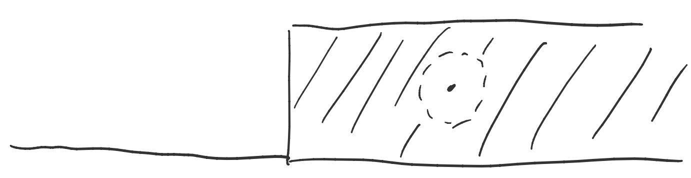
Attenzione: la restrizione di p a $X \subseteq P \times Q$ potrebbe non essere aperta. Ad esempio, dimostrare che $p : X \to \mathbb{R}$ non è aperta, dove $P = Q = \mathbb{R}$, p è la proiezione sulla prima coordinata, e $X = (]-\infty, 0] \times \{0\}) \cup ([0, +\infty[\times [0,1])$:



Dimostrare anche che $p : X \to \mathbb{R}$ è un'identificazione.

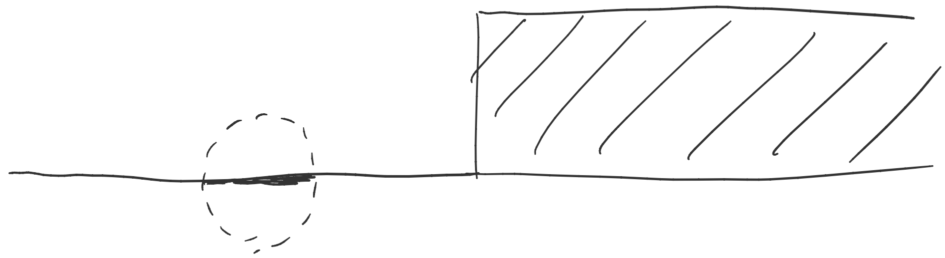
Svolgimento: Troviamo un disco aperto tale che la sua intersezione con X (allora sarà un aperto di X) abbia proiezione su $\mathbb{R}$ non aperta.

ad es.:



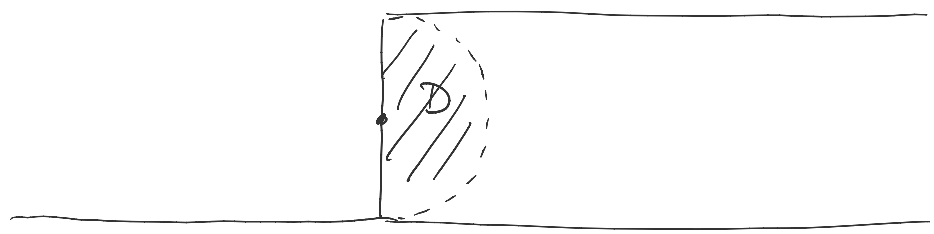
La sua proiez. è aperta in $\mathbb{R}$

Dobbiamo scegliere un disco aperto la cui intersezione con X <u>non è</u> un aperto di $\mathbb{R}^2$:



l'intersez. non è aperta in $\mathbb{R}^2$, ma la proiezione è aperta in $\mathbb{R}$

Scegliamo $D = B\left((0,\frac{1}{2}), \frac{1}{2}\right)$:



La proiezione di $D \cap X$ su $\mathbb{R}$ è $[0, \frac{1}{2}[$ che non è aperto in $\mathbb{R}$.

Quindi effettivamente $p: X \to \mathbb{R}$ non è aperta.

Per dimostrare che p è un'identificazione, proviamo a dimostrare che è suriettiva e chiusa. Suriettività: ok.

Chiusura: potremmo usare il fatto che i compatti sono universalmente chiusi, cioè se R è compatto, allora la seconda proiezione $s: R \times S \to S$ è chiusa.

Problema: X non è un prodotto. Ad es. se avessi avuto $\tilde{X} = \mathbb{R} \times [0,1]$

Problema: X non è un prodotto. Ad es. se avessi avuto $\tilde{X} = \mathbb{R} \times [0,1]$ allora avrei avuto la prima proiezione chiusa.

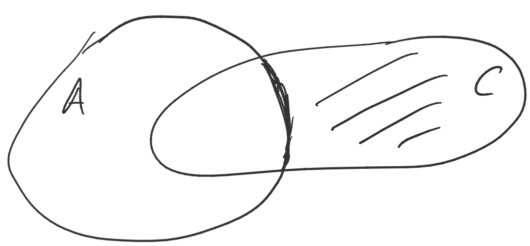
Voglio comunque usare $\tilde{X}$, e osservo che X è contenuto in $\tilde{X}$ ed è chiuso in $\tilde{X}$. Allora se Z è un chiuso di X, Z è anche chiuso in $\tilde{X}$, ma allora $p(Z)$ è chiuso perché $\tilde{X}$ è universalmente chiuso.

Segue: p è un'applicazione chiusa, quindi è un'identificazione.

<u>Esercizio:</u> Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ aperto, e $C \subseteq X$ connesso. Supponiamo $C \cap A \neq \emptyset$ ma C non è contenuto in A.

Dimostrare che $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

<u>Svolgimento:</u>



Supponiamo per assurdo che $C \cap \partial A = \emptyset$.

Ricordiamo: $\partial A = \overline{A} \setminus \underbrace{A^\circ}_{\substack{\parallel \leftarrow A \text{ è aperto} \\ A}} = \overline{A} \setminus A$.

Cerchiamo di scrivere C come unione di due aperti disgiunti e non vuoti:

$$C = (C \cap A) \cup (C \setminus A)$$

$$C = \underbrace{(C \cap A)}_{\text{aperto in } C} \cup \underbrace{(C \setminus A)}$$

posso scriverlo come

$C \cap (\text{aperto})$? opp.

$C \setminus (\text{chiuso})$?

Risposta: Sì, perché $C \setminus A = C \setminus \overline{A}$, perché

$$C \setminus \overline{A} \underset{\text{sempre}}{=} C \setminus (A \cup \partial A) = C \setminus A$$

perché non ci sono punti di ∂A che sono in C

Allora $C = (C \cap A) \cup (C \setminus \overline{A})$ e sono entrambi aperti, disgiunti, non vuoti (perché C interseca A ma non è contenuto): <u>assurdo</u>.

<u>Esercizio</u>: Sia $N \subseteq M_n(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici <u>nilpotenti</u>.

Dire se:

1) N è chiuso.

2) N è compatto.

3) N è connesso.

<u>Svolgimento</u>: Abbiamo $N = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^k = 0 \text{ per un } k > 0\}$.

Svolgimento: Abbiamo $N = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^k = 0 \text{ per un } k > 0\}$.

Possiamo scrivere N come unione degli insiemi

$$N_k = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^k = 0\}$$

posso scrivere $N = \bigcup_{k=1}^{n} N_k$, perché per il teorema di Cayley-Hamilton non posso avere $A^{n+1} = 0$ ma $A^k \neq 0$ $\forall k \leq n$.

Adesso N_k è chiuso perché la condizione $A^k = 0$ è esprimibile mediante gli n^2 polinomi

$$(A^k)_{1,1} = 0, \quad (A^k)_{1,2} = 0, \ldots, \quad (A^k)_{n,n} = 0$$

dove $(A^k)_{i,j}$ è l'entrata (i,j) di A^k.

Allora N è unione di un numero finito di chiusi, quindi è chiuso.

Anche più semplicemente: $N = N_n$ (perché se $A^k = 0$ con $k < n$ allora anche $A^n = 0$).

Invece N non è compatto perché non è limitato, ad es.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$ è nilpotente $\forall t \in \mathbb{R}$ $(A^2 = 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è nilpotente } \forall t \in \mathbb{R} \qquad (A^2 = 0).$$

Cerchiamo di dimostrare che N è connesso dimostrando che è connesso per archi. Ad esempio: possiamo collegare $A \in N$ con la matrice nulla?

Sì, basta prendere il cammino $\alpha(t) = rA$ con $r \in [0,1]$; infatti se $A^k = 0$ allora $(rA)^k = r^k A^k = 0$.

<u>Esercizio</u>: Sia $X \subseteq M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici A tali che A ha almeno un autovalore $\lambda \in [0,1]$.

Dimostrare che X è chiuso.

<u>Svolgimento</u>: Abbiamo:

$$X = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in [0,1] \mid \det(\lambda \cdot I - A) = 0 \}$$

Idea: trattiamo λ come una variabile aggiuntiva, nel senso che consideriamo

$$Y = \{ (A, \lambda) \in M_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \mid \det(\lambda I - A) = 0 \}$$

Allora $A \in X$ se e solo se $\exists \lambda \in [0,1]$ tale che $(A, \lambda) \in Y$, cioè $X = p(Y)$ dove p = proiezione su $M_n(\mathbb{R})$, $p : M_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$.

cioè $X = p(Y)$ dove p = proiezione su $M_n(\mathbb{R})$, $p : M_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$.

$[0,1]$ è compatto quindi p è chiusa, inoltre Y è chiuso perché è espresso come $f^{-1}(0)$ dove $f(A, \lambda) = \det(\lambda I - A)$ è continua.

Segue: X è chiuso.

Esercizio per casa: Sia $f : X \to Y$ applicazione continua fra spazi topologici. Supponiamo Y di Hausdorff, e consideriamo

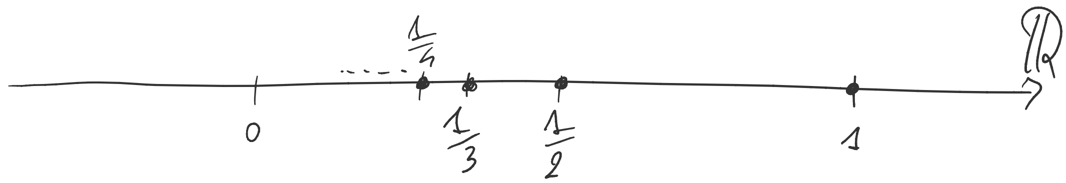
$$G_f = \{ (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}, \text{ il grafico di } f.$$

1) Dimostrare che G_f è chiuso in $X \times Y$.

2) Non supponiamo f continua, e supponiamo Y compatto. Dimostrare che se G_f è chiuso allora f è continua. (Suggerimento: dato $A \subseteq Y$ aperto, per dimostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto considerare piuttosto $Y \setminus A$).

Esercizio: In $X = \mathbb{R}$ considero $K = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$. Sia $\sim$ la relazione che identifica K ad un punto (cioè $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in K$). Dimostrare che $Y = X/\sim$ non è di Hausdorff, ma dati $a, b \in Y$ distinti, esiste un intorno di a che non contiene ma dati $a, b \in Y$ distinti, esiste un intorno di a che non contiene b oppure un intorno di b che non contiene a.

<u>Svolgimento</u>:



Per dimostrare che Y non è di Hausdorff, considero $[0], [1] \in Y$ (sembrano punti „infinitamente vicini" ma distinti).

Sia U intorno di $[0]$ in Y, allora $\pi^{-1}(U)$ è un intorno di 0 in $\mathbb{R}$ ($\pi : X \to Y$ la proiezione). Ma allora $\pi^{-1}(U)$ contiene qualche punto identificato con 1 ($\frac{1}{n}$ con n abbastanza grande). Allora U contiene $[1]$, e Y non è di Hausdorff.

Per la seconda domanda, siano $a = [x]$, $b = [x']$ con $x, x' \in X$.

Se $x, x' \notin K$ e $x \neq 0 \neq x'$, allora troviamo intorni V_x, $V_{x'}$ di x e x' in $\mathbb{R}$, disgiunti e saturi (cioè $\pi^{-1}(\pi(V_x)) = V_x$, basta prendere V_x e $V_{x'}$ non contenenti né 0 né elem. di K). Allora $\pi(V_x)$ e $\pi(V_{x'})$ sono intorni aperti di a e b, disgiunti.

Se $x \in K \cup \{0\}$ ma $x' \notin K \cup \{0\}$, posso prendere comunque $V_{x'}$ come prima, e $\pi(V_{x'})$ è un aperto di Y che non contiene $a = [x]$.

Infine, se $x, x' \in K \cup \{0\}$, visto che $[x] \neq [x']$, allora $x \in K$ e $x' = 0$ opp. $x' \in K$ e $x = 0$.

Sia ad es. $x \in K$, $x' = 0$, allora definisco $V_x = \left]1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2} - \frac{1}{9}, \frac{1}{2} + \frac{1}{9}\right[\cup \dots$ (cioè prendo un'unione di intervalli che contengono gli elt di K, diventano sempre più piccoli, non contengono 0). Di nuovo V_x è saturo, quindi $\pi(V_x)$ è aperto, contiene $[x]$ ma non $[x']$.