Geometria 2, Lezione 33

Tuesday, 8 June 2021 12:09

Osservazione: Altre formule per $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$:

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu}, \quad \mathcal{M} = N \cdot X_{uv}, \quad \mathcal{N} = N \cdot X_{vv}.$$

Inoltre abb. già ricordato $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

Deduciamo:

$$H = \frac{G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M} + E\mathcal{N}}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$$

Inoltre le curvature principali sono gli zeri del polinomio caratt. di A, polinomio che è $x^2 - 2Hx + K$

quindi le curvature principali sono

$$H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

cioè sono funzioni C^∞ sulla superficie.

<u>Esempio</u>: Supponiamo che S sia data con una carta locale di Monge φ, cioè $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ (nell'aperto che stiamo considerando, S è il grafico di f).

Calcoliamo le due forme fondamentali:

$$X_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \qquad X_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}$$

(se calcoliamo N come $\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$, allora osserviamo che $\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$)

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

$$\mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Otteniamo $\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot Hf$ hessiano di f

<u>Esempio</u>: Vediamo un caso particolare dell'esempio precedente, calcoliamo il valore delle funzioni viste prima in un solo punto $p \in S$. Traslando S posso supporre $p=(0,0,0)$, e ruotando S posso supporre che $T_p S = \text{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ (cioè il piano xy).

Come prima prendiamo S definita in un intorno di p da $\varphi(u,v)=(u,v,f(u,v))$, ma allora in questo caso $f(0,0)=0$, e $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Allora $X_u(0,0)=(1,0,0)$, $X_v(0,0)=(0,1,0)$, e

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}(0,0) & \mathcal{M}(0,0) \\ \mathcal{M}(0,0) & \mathcal{N}(0,0) \end{pmatrix} = Hf(0,0)$$

Sviluppiamo f in serie di Taylor attorno a $(0,0)$:

$$f(u,v) = \underbrace{\frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{2}uv + \frac{c}{2}v^2}_{u,v} + o(\|(u,v)\|^2)$$

Cambiamo coordinate $\overset{u,v}{\vee}$ linearmente in modo da avere semplicemente

$$f(u,v) = \frac{a}{2}u^2 + \frac{c}{2}v^2 + o\left(\|(u,v)\|^2\right)$$

Segue: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = A$ matrice dell'operatore forma.

Deduciamo che la 2^a forma fondamentale descrive la superficie „al secondo ordine", mentre T_pS la descrive „al primo ordine".

<u>Teorema</u> (teorema egregium di Gauß): La curvatura gaußiana è invariante per isometrie locali.

<u>Oss.:</u> 1) Quindi ad esempio non esiste alcuna isometria locale fra $U \subseteq S^2$ aperto (non vuoto) e $V \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto (non vuoto).

2) Le funzioni L, M, N non sono invarianti per isometrie locali, ad esempio $\mathbb{R}^2$ e il cilindro parametrizzato da $(\cos(u), \sin(u), v)$ hanno diversa 2^a forma fondamentale, ma $(u,v) \longmapsto (\cos(u), \sin(u), v)$ è un'isometria locale.

Dimostrazione: Possiamo considerare E, F, G invarianti per isometrie locali, perché data $f: S_1 \to S_2$ isometria locale, prendiamo una carta locale φ di S_1, e usiamo come come carta locale per S_2 l'applicazione $f \circ \varphi$ (restringendo abbastanza gli aperti). Allora $df(X_u^{S_1}) = X_u^{S_2}$ e $df(X_v^{S_1}) = X_v^{S_2}$, e df conserva il prodotto scalare.

Nella dimostrazione quindi esprimeremo K come funzione solo di E, F, G e delle loro derivate, e questo implica che K è invariante per isometrie locali.

Partiamo da $K = \dfrac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}$. Inoltre

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = \frac{(X_u \wedge X_v) \cdot X_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \mathcal{M} = \dots, \quad \mathcal{N} = \dots$$

Allora

$$\tilde{K} = K \cdot (EG - F^2)^2 = \Big((X_u \wedge X_v) \cdot X_{uu}\Big)\Big((X_u \wedge X_v) \cdot X_{vv}\Big) - \Big((X_u \wedge X_v) \cdot X_{uv}\Big)^2$$

$$\left((X_u \wedge X_v) \cdot X_{uv} \right)$$

Ricordiamo: $$(V_1 \wedge V_2) \cdot V_3 = \det\begin{pmatrix} \boxed{\quad V_1 \quad} \\ \boxed{\quad V_2 \quad} \\ \boxed{\quad V_3 \quad} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boxed{V_1} & \boxed{V_2} & \boxed{V_3} \end{pmatrix},$$

allora $$\tilde{K} = \det\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uu} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{vv} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uv} \end{pmatrix}^2 =$$

vettori riga

$$= \det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{vv} \end{pmatrix}^t}_{\shortparallel} \right) - \det\left(\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uv} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uv} \end{pmatrix}^t \right)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\quad X_u \quad} \\ \boxed{\quad X_v \quad} \\ \boxed{\quad X_{uu} \quad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{X_u} & \boxed{X_v} & \boxed{X_{vv}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F & (\dots) \\ F & G & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) & (\dots) \end{pmatrix} = P$$

Ora: $$\det(P) = \det\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ X_{uu} \cdot X_u & X_{uu} \cdot X_v & X_{uu} \cdot X_{vv} \end{pmatrix} = \alpha \; +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} E & F & X_u \cdot X_{vv} \\ F & G & X_v \cdot X_{vv} \\ X_{uu} \cdot X_u & X_{uu} \cdot X_v & 0 \end{pmatrix} = \beta$$

la somma fa la terza colonna di P

Allo stesso modo tratto il secondo determinante dell'espressione di $\tilde{K}$, e ottengo

$$\tilde{K} = \alpha + \beta - \det\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ X_{uv}\cdot X_u & X_{uv}\cdot X_v & X_{uv}\cdot X_{uv} \end{pmatrix}^{=\delta} -$$

$$- \det\begin{pmatrix} E & F & X_{uv}\cdot X_u \\ F & G & X_{uv}\cdot X_v \\ X_{uv}\cdot X_u & X_{uv}\cdot X_v & 0 \end{pmatrix}^{=\gamma}$$

Inoltre: $X_{uu}\cdot X_u = \frac{1}{2}\left(X_u\cdot X_u\right)_u = \frac{1}{2}E_u$

$$X_{uu}\cdot X_v = \left(X_u\cdot X_v\right)_u - X_u\cdot X_{uv} = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

analogamente $X_{uv}\cdot X_u = \frac{E_v}{2}$ $\qquad X_{vv}\cdot X_u = F_v - \frac{G_v}{2}$

$$X_{uv}\cdot X_v = \frac{G_u}{2} \qquad X_{vv}\cdot X_v = \frac{G_v}{2}$$

Otteniamo:

$$\tilde{K} = \underbrace{\left(EG - F^2\right)\left(\overbrace{X_{uu}\cdot X_{vv} - X_{uv}\cdot X_{uv}}^{\omega}\right)}_{\alpha-\delta} + \det\begin{pmatrix} E & F & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\alpha-\delta} \qquad \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & F_v-\frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix} = \beta$$

$$-\det\begin{pmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Infine $\omega = \underline{X_{uu}\cdot X_{vv}} - \underline{X_{uv}\cdot X_{uv}} = (X_{uu}\cdot X_v)_v - (X_v\cdot X_{uv})_u =$

$$= \left(F_u - \frac{E_v}{2}\right)_v - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Abbiamo espresso allora K usando soltanto E, F, G e le loro derivate parziali (prime e seconde).

$\square$

<u>Oss.</u>: Se studiamo superfici diff. <u>non</u> immerse in $\mathbb{R}^3$, non abbiamo né forme fondamentali né operatore forma né curvature.
Però in geometria riemanniana si considerano varietà equipaggiate con un prodotto scalare su ogni spazio tangente. In questo caso è definita una curvatura gaußiana, usando proprio la formula della dimostrazione.

<u>Oss.</u>: Nel caso di superfici <u>non immerse</u>, la nostra definizione di T_pS

Oss.: Nel caso di superfici non immerse, la nostra definizione di T_pS non si può riprodurre. Come si definisce allora T_pS?

Si parte vedendo un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ non come vettore velocità di una curva, bensì identificandolo con $\frac{\partial}{\partial v}(p)$, considerata come applicazione lineare

$$\frac{\partial}{\partial v}(p) : \underbrace{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}_{\substack{\text{funzioni } C^\infty \\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si osserva che vale la regola di Leibnitz:

$$\frac{\partial (fg)}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)\, g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial v}(p)$$

Consideriamo tutte le appl. lineari con questa proprietà (si chiamano derivazioni):

$$\left\{ \delta : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta \text{ è lineare} \\ \delta(fg) = \delta(f)\, g(p) + f(p)\, \delta(g) \end{array} \right\}$$

Si dimostra facilmente che ogni δ siffatta è $\frac{\partial}{\partial v}(p)$ per qualche v (si trova v calcolando $\delta(x_1), \delta(x_2), \dots \delta(x_n)$).

In generale si definisce per una varietà differenziabile S lo spazio tangente come

$$T_p S = \left\{ \delta : C^\infty(S, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta \text{ lineare,} \\ \delta \text{ derivazione nel senso già visto} \end{array} \right\}$$

Esempi ed esercizi

Esercizio (già dato) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva diff. parametrizzata, a velocità unitaria e $\alpha''(t) \neq 0$ $\forall t$. Dimostrare:

1) $\alpha(I)$ è contenuta in un piano affine $\iff$ $\tau(t) = 0$ $\forall t \in I$
2) $\alpha(I)$ è contenuta in una circonferenza $\iff$ $\tau(t) = 0$ e $k(t) =$ costante $\forall t$.

Svolgimento: 1) $\Longrightarrow$ Scriviamo il piano affine come $\underbrace{\alpha(t_0)}_{\text{punto sul piano}} + \underbrace{v^\perp}_{\text{sp. vett. soggiacente}}$

dove $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Visto che $\alpha(t) \subseteq \alpha(t_0) + v^\perp$ abb. $\alpha(t) - \alpha(t_0) \subseteq v^\perp$ cioè $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot v = 0$, e derivando otteniamo $\alpha'(t), \alpha''(t)$ anche $\in v^\perp$. Segue che $b(t)$ è sempre parallelo a v, cioè $b(t) = \frac{v}{\|v\|}$ oppure

$b(t)$ è sempre parallelo a v, cioè $b(t)=\frac{v}{\|v\|}$ oppure $b(t)=\frac{-v}{\|v\|}$. Allora $b'(t)=0$ e $\tau(t)=0$ $\forall t$.

$\Leftarrow$) Supponiamo $\tau(t)=0$, quindi $b'(t)=0$ $\forall t$, cioè b è costante, $b(t)=v$ fissato, $\forall t$.

Dimostriamo che $\alpha(t)\in \underbrace{\alpha(t_0)+v^\perp}_{\text{questo sarà il piano affine desiderato}}$ $\forall t$, dove $t_0\in I$ è fissato.

Calcoliamo $\Big(\alpha(t)-\alpha(t_0)\Big)\cdot v=F(t)$ derivandola otteniamo $\alpha'(t)\cdot \underset{\underset{b(t)}{\shortparallel}}{v}=0$ $\forall t$, cioè $F(t)$ è costante, e inoltre vale 0 in $t=t_0$, quindi $F(t)=0$ $\forall t$.

2) $\Rightarrow$) Una circonferenza in $\mathbb{R}^3$ è contenuta in un piano affine, e per la parte 1) sappiamo $\tau(t)=0$ $\forall t$. Abbiamo già calcolato la curvatura della circonferenza, è costante e uguale a $\frac{1}{r}$ dove r è il raggio.

$\Leftarrow$) Dalla parte 1) sappiamo che $\alpha(t)\in\alpha(t_0)+b(t_0)^\perp$, a posteriori il centro della circonferenza è ottenuto partendo da $\alpha(t)$ e andando in direzione $n(t)$ per una distanza uguale al raggio, che è $\frac{1}{k(t)} = \frac{1}{k(t_0)}$, cioè

$$c(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t_0)} n(t)$$

Derivando:

$$c'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k(t_0)} \underbrace{n'(t)}_{\left(-k(t)\alpha'(t) + \cancel{\tau(t) b(t)}\right)} = \alpha'(t) - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\frac{k(t)}{k(t_0)}}} \alpha'(t) = 0$$

cioè $c(t)$ è costante, ed è a distanza $\frac{1}{k(t_0)}$ da $\alpha(t)$ $\forall t$,

cioè $\alpha(t)$ è contenuta nella circonferenza di centro $c(t_0)$ e raggio $\frac{1}{k(t_0)}$ nel piano $\alpha(t_0) + b(t_0)^{\perp}$.

<u>Esercizio:</u> 1) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva diff. param. a velocità unitaria e $\alpha''(t) \neq 0$ $\forall t$. In aggiunta supponiamo $\tau(t) \neq 0$ $\forall t$.

Dimostrare che $\overset{\text{se}}{\vee}$ $\alpha(I) \subseteq$ superficie di una sfera di raggio r (non necessariamente centrata in $(0,0,0)$) allora

r (non necessariamente centrata in $(0,0,0)$) allora

$k(t) \geq \frac{1}{r}$ e $r^2 = \rho(t)^2 + \left(\rho'(t)\,\sigma(t)\right)^2$ dove

$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$ e $\sigma(t) = \frac{1}{\tau(t)}$.

2) (per casa) Data α come prima (cioè $\tau(t) \neq 0 \ \forall t$)

dimostrare che se $k(t) > 0$ e $\rho(t)^2 + (\rho'(t)\sigma(t))^2 = \text{costante}$,

allora $\alpha(I) \subseteq$ sup. di una sfera.

Svolgimento di 1): Sappiamo $\|\alpha(t) - c\| = r$ dove c

è il centro della sfera. Cioè

$$(\alpha(t)-c)\cdot(\alpha(t)-c) = r^2$$

derivando otteniamo $2\alpha'(t)\left(\alpha(t)-c\right) = 0$

derivando ancora otteniamo $\underbrace{\alpha''(t)}_{\substack{\shortparallel \\ k(t)n(t)}}\left(\alpha(t)-c\right) + \underbrace{\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = 0$

quindi $k(t) = \dfrac{-1}{n(t)\cdot(\alpha(t)-c)} = \dfrac{1}{|n(t)\cdot(\alpha(t)-c)|} \geq$

$$n(t)\cdot(\alpha(t)-c) \qquad |n(t)\cdot(\alpha(t)-c)|$$

$$\geq \frac{1}{\underbrace{\|n(t)\|}_{=1}\cdot\|\alpha(t)-c\|} = \frac{1}{r}.$$

Per l'uguaglianza $r^2 = \dots$, calcoliamo le coordinate di $\alpha(t) - \overset{\text{centro}}{c}$ rispetto alla base di Frenet $(\alpha'(t), n(t), b(t))$:

$$\alpha'(t)\cdot(\alpha(t)-c)=0 \quad \text{(già osservato)}$$

$$(\alpha(t)-c)\cdot n(t) = -\frac{1}{k(t)} = -\rho(t)$$

derivando questa otteniamo $\underbrace{(\alpha(t)-c)}\cdot\tau(t)\underbrace{b(t)} = -\rho'(t)$

segue $(\alpha(t)-c)\cdot b(t) = -\sigma(t)\rho'(t)$

cioè le coord. sono 0, $-\rho(t)$, $-\sigma(t)\rho'(t)$, e allora

$$r^2 = \|\alpha(t)-c\|^2 = \rho(t)^2 + (\sigma(t)\rho'(t))^2$$

Suggerimento per 2): indovinare $c(t)$ usando le coordinate della parte 1), e dim. che $c(t)=$ costante.