Geometria 2, Lezione 32

Monday, 7 June 2021 06:41

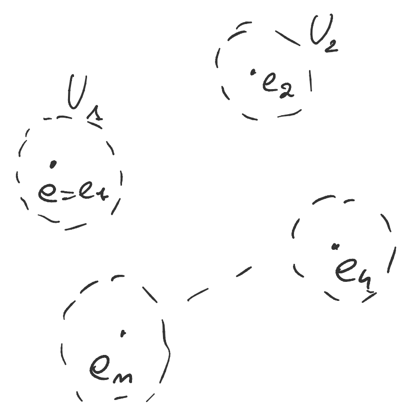
Esempi ed esercizi

Esercizio (già dato): E spazio topol. di Hausdorff, $G \subseteq Omeo(E)$ sottogruppo finito. Supponiamo G agisca liberamente, cioè $\forall e \in E\ \forall g \in G \setminus \{Id_E\}$: $g(e) \neq e$.

Allora G agisce in modo propriamente discontinuo.

Parte aggiuntiva: E/G è di Hausdorff.

Svolgimento: Sia $e \in E$, e poniamo $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ con $g_1 = Id_E$,



e poniamo $e_i = g_i(e)$.

Esistono intorni U_i di e_i tali che $U_i \cap U_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Vogliamo un intorno U di e tale che $g(U) \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq Id_E$, ma U_1 potrebbe non soddisfare questa proprietà.

Ad es. $g_2(U_1)$: se è contenuto in U_2 allora $g_2(U_1) \cap U_1 \subseteq U_2 \cap U_1 = \emptyset$, ma $g_2(U_1)$ potrebbe non essere cont. in U_2.

Definiamo allora $U = U_1 \cap g_2^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap g_n^{-1}(U_n)$.

Verifichiamo la proprietà voluta per U: dato g_i con $i \neq 1$, Verifichiamo la proprietà voluta per U: dato g_i con $i \neq 1$, abb.

$$U \cap g_i(U) = U \cap g_i\left(U_1 \cap g_2^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \underbrace{g_i^{-1}(U_i)} \cap \dots \cap g_n^{-1}(U_n)\right) =$$

$$= U \cap g_i(U_1) \cap g_i(g_2^{-1}(U_2)) \cap \dots \cap U_i \cap \dots \cap g_i(g_n^{-1}(U_n)) \subseteq$$

$$\subseteq \underbrace{U_1}_{\text{perché } U \subseteq U_1} \cap U_i = \emptyset .$$

Seconda parte: Dimostriamo che E/G è di Hausdorff, dimostrando che $K = \{(e, g(e)) \mid e \in E,\ g \in G\}$ è chiuso in E.

Scriviamo

$$K = \{(e,e) \mid e \in E\} \cup \{(e, g_2(e)) \mid e \in E\} \cup \dots$$

$$\dots \cup \{(e, g_n(e)) \mid e \in E\}.$$

Sappiamo che il primo è Δ = la diagonale in $E \times E$, che è chiusa perché E è di Hausdorff. Anche gli altri sono chiusi, perché $\{(e, g_i(e)) \mid e \in E\}$ è l'immagine di Δ tramite l'omeomorfismo

$$E \times E \xrightarrow{Id_E \times g_i} E \times E$$
$$(e, e') \longmapsto (e, g_i(e'))$$

Quindi K è unione finita di chiusi, quindi è chiuso.

Quindi K è unione finita di chiusi, quindi è chiuso.

Esercizio per casa: Dimostrare che ogni applicazione continua $S^2 \to S^1$ è omotopa ad una applicaz. costante.

Operatore forma

Definizione: Un campo differenziabile di vettori su $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie diff. immersa è un'applicazione differenziabile $\varphi: S \to \mathbb{R}^3$ (si intende $\varphi(p)$ come vettore applicato in $p \in S$). Dato un tale φ, esso si dice tangente se $\varphi(p) \in T_pS$ $\forall p \in S$, e si dice normale se $\varphi(p) \perp T_pS$ $\forall p$.

La sup. S si dice orientabile se esiste un campo di vettori normale φ tale che $\varphi(p) \neq 0$ $\forall p \in S$. Equivalentemente, se esiste φ tale che $\|\varphi(p)\| = 1$ $\forall p \in S$. La superficie S con un tale campo di vettori si dice anche superficie orientata.

Esempio: 1) Se S è definita come $S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$ come abb. visto, allora S è orientabile, perché ∇f_p è normale a ogni vettore tangente (se $v \in T_pS$ è uguale ad $\alpha'(t_0)$

a ogni vettore tangente (se $v \in T_p S$ è uguale ad $\alpha'(t_0)$ con $\alpha: I \to S$ tale che $\alpha(t_0) = p$, allora basta derivare

$$f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = 0 \quad \text{ottengo} \quad \nabla f_p \perp \alpha'(t_0)\Big).$$

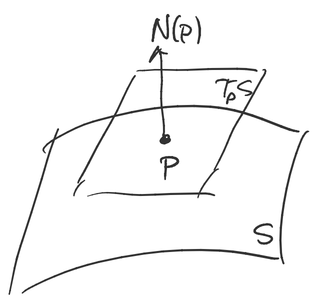
componenti di α

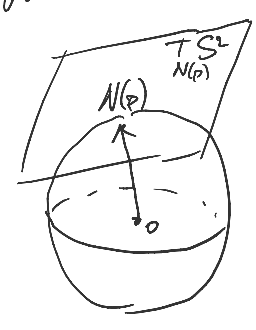
2) Se S ha un atlante fatto da una sola carta locale φ, allora S è orientabile, basta prendere $X_u \wedge X_v$.

3) Il nastro di Möbius non è orientabile (preso „senza bordo").

__Definizione:__ Sia S superficie immersa in $\mathbb{R}^3$, orientata con campo di vettori normali (di norma $=1$) $N: S \to S^2$ (S^2 invece di $\mathbb{R}^3$ perché $\|N(p)\| = 1 \ \forall p$). Consideriamo per ogni $p \in S$ il differenziale

$$dN_p : T_p S \to T_{N(p)} S^2$$





Osserviamo che formalmente $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ sono lo stesso sottospazio vettoriale di dim. 2 di $\mathbb{R}^3$, perché sono entrambi ortogonali a $N(p)$.

sottospazio vettoriale di dim. 2 di $\mathbb{R}^3$, perché sono entrambi ortogonali a $N(p)$.

Quindi posso pensare dN_p come un'applicazione

$$L_p : T_pS \to T_pS .$$
$$v \longmapsto dN_p(v)$$

Questo è detto <u>operatore forma</u>.

<u>Oss.:</u> $L_p(v)$ dice in che direzione si sposta $N(p)$ se mi muovo da p in direzione v.

<u>Teorema:</u> L_p è autoaggiunto (= simmetrico) rispetto alla 1ª forma fondamentale, cioè $L_p(v) \cdot w = v \cdot L_p(w)$ $\forall p \in S, \forall v,w \in T_pS$.

<u>Dim.:</u> Basta verificarlo su una base di T_pS, ad es. X_u, X_v di una carta locale φ. Ricordiamo: $X_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0)$ (con $\varphi(u_0,v_0)=p$), allora $L_p(X_u) = \frac{\partial}{\partial u}\left(N \circ \varphi\right)(u_0,v_0)$. Denotiamo per semplicità allora $N_u = L_p(X_u)$, $N_v = L_p(X_v)$. Da $N \cdot X_u = 0$, derivando rispetto a v otteniamo $N_v \cdot X_u + N \cdot X_{uv} = 0$, e

$N_v \cdot X_u + N \cdot X_{uv} = 0$, e

da $N \cdot X_v = 0$ derivando rispetto a u otteniamo $N_u \cdot X_v + N \cdot X_{vu} = 0$

e visto che $X_{uv} = X_{vu}$ abb. $N_v \cdot X_u = N_u \cdot X_v$.

Da questo segue $L_p(v) \cdot w = v \cdot L_p(w) \quad \forall v, w \in \{X_u, X_v\}$.

$\square$

II forma fondamentale

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ e N come prima.

<u>Definizione:</u> 1) La forma quadratica associata a $(-L_p)$ su T_pS è detta 2^a forma fondamentale:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p : T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -L_p(v) \cdot v \end{aligned}$$

Si denota allo stesso modo anche la forma bilineare simmetrica

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto -L_p(v) \cdot w \end{aligned}$$

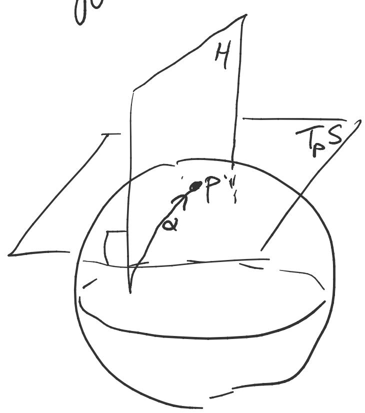
(è simmetrica grazie al teorema visto)

2) Sia $p \in S$ e $\alpha : I \to S$ regolare. Supponiamo $\alpha(t_0) = p$ per $t_0 \in I$, e supponiamo sia definita la curvatura $k_\alpha(t_0)$ di α in t_0, cioè una riparam. a velocità unitaria di α ha derivata seconda $\neq 0$ in t_0. Allora definiamo

$$K_{n,\alpha}(t_0) = k_\alpha(t_0)\, n_\alpha(t_0) \cdot N(p)$$

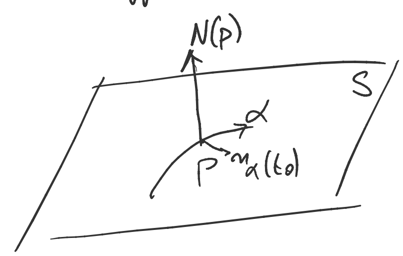
che si dice curvatura normale di α in p.

Esempio: Supponiamo $\alpha(I)$ sia ottenuta intersecando S con un piano affine H ortogonale a T_pS: in questo caso



$$n_\alpha(t_0) = \pm N(p) \quad \text{e} \quad K_{n,\alpha}(t_0) = \pm k_\alpha(t_0)$$

All'„estremo opposto" S è contenuta in un piano affine, α è contenuta in S quindi $\alpha'(t_0), \alpha''(t_0) \in T_pS$, e allora



$$K_{n,\alpha}(t_0) = 0 \quad \text{qualsiasi sia} \quad k_\alpha(t_0).$$

definizione

Proposizione (teorema di Meusnier): Siano S e α come nella definizione, dato $v=\alpha'(t_0)$:

$$\mathrm{II}_p(v) = \|v\|^2 k_{n,\alpha}(t_0)$$

Dim.: Possiamo assumere α a velocità unitaria in t_0, cioè $\|v\|=1$, abbiamo

$$\mathrm{II}_p(v) = -L_p(v)\cdot v, \quad \text{e} \quad L_p(\alpha'(t_0)) = (N\circ\alpha)'(t_0).$$

D'altronde

$$(N\circ\alpha)(t)\cdot\alpha'(t) = 0,$$

derivando otteniamo

$$(N\circ\alpha)'(t)\cdot\alpha'(t) = -(N\circ\alpha)(t)\cdot\alpha''(t).$$

Allora

$$\mathrm{II}_p(v) = (N\circ\alpha)(t_0)\cdot\underbrace{\alpha''(t_0)}_{= k_\alpha(t_0)\cdot n_\alpha(t_0)} = k_{n,\alpha}(t_0).$$

$\square$

Definizione: Diamo una notazione per la matrice di II_p nella base (X_u, X_v) di T_pS:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \mathcal{L} = \mathrm{II}_p(X_u, X_u),\ \mathcal{M} = \mathrm{II}_p(X_u, X_v),\ \mathcal{N} = \mathrm{II}(X_v, X_v),$$

e anche:

$$\mathcal{L} = -L_p(X_u) \cdot X_u = -N_u \cdot X_u,$$
$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v,$$
$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v.$$

<u>Oss.</u>: Ricordiamo: se A è la matrice di $-L_p$ nella base (X_u, X_v), allora

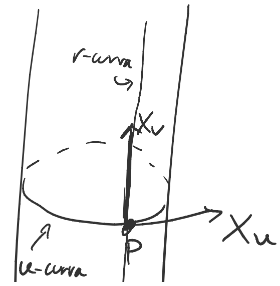
$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} \cdot A$$

↑ matrice della 1^a forma fondam., cioè del prodotto scalare

<u>Esempi</u>: 1) Sia $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ con $r>0$.

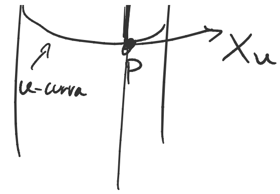
Esercizio: calcolare $E, F, G, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, A$ e ottenere $\mathrm{II}_p(v) = -\frac{1}{r}\|v\|^2$ (usare carta locale esplicita).

2) Cilindro di raggio $r>0$:



$$\varphi(u,v) = (r\cos(u), r\sin(u), v)$$

$$\quad(\qquad\qquad\qquad)$$



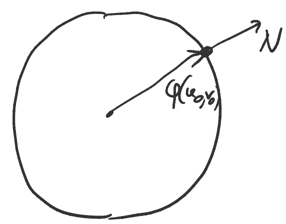
$$X_u = \left(-r\sin(u),\ r\cos(u),\ 0\right)$$

$$X_v = \left(0,\ 0,\ 1\right)$$

$$E = X_u \cdot X_u = r^2, \quad F = X_u \cdot X_v = 0, \quad G = X_v \cdot X_v = 1$$

Possiamo ottenere N usando X_u, X_v:

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{\left(r\cos(u),\ r\sin(u),\ 0\right)}{r} = \left(\cos(u),\ \sin(u),\ 0\right)$$



Per calcolare II_p:

$$N_u = \left(-\sin(u),\ \cos(u),\ 0\right)$$

$$N_v = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\mathcal{L} = -N_u \cdot X_u = -\left(r\sin^2(u) + r\cos^2(u)\right) = -r$$

$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v = 0,$$

$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v = 0$$

Allora: $\begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$

quindi $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$

quindi $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Osserviamo: X_u e X_v sono autovettori di A, di autovalori $-\frac{1}{r}$ e 0.

Definizioni: 1) Gli autovettori di $-L_p$ si dicono <u>vettori principali</u>, e se hanno norma $=1$ si dicono <u>direzioni principali</u>. Gli autovalori si dicono <u>curvature principali</u> (sono il massimo e il minimo di II_p calcolata su vettori di norma 1).

2) La <u>curvatura media</u> $H(p)$ di S in p è la media fra le due curvature principali, cioè

$$H(p) = \frac{tr(-L_p)}{2}.$$

La curvatura gaußiana $K(p)$ di S in p è il prodotto delle due curvature principali: $K(p) = \det(-L_p)$.

3) Un punto $p \in S$ si dice

<u>ellittico</u> se $K(p) > 0$,

iperbolico se $K(p) < 0$,

parabolico se $K(p) = 0$ ma $-L_p \neq 0$,

polare se $-L_p = 0$

ombelicale se $-L_p$ è un'omotetia, cioè se le due curvature principali sono uguali.