Applicazioni differenziabili su superfici

Def.: 1) Sia S sup. diff. immersa in $\mathbb{R}^3$, e sia $f: S \to \mathbb{R}$.

La funzione f si dice <u>differenziabile</u> in $p \in S$ se esiste una carta locale (U, W, φ) con $W \ni p$ e tale che $f \circ \varphi: U \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in $\varphi^{-1}(p)$. La funzione f si dice <u>differenziabile</u> se è differenziabile in p $\forall p \in S$.

2) Un'applicazione $f: S \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>differenziabile</u> se lo sono le sue componenti (come funzioni $S \to \mathbb{R}$).

3) Siano S_1, S_2 sup. diff. immerse in $\mathbb{R}^3$, e $f: S_1 \to S_2$.

L'appl. f si dice <u>differenziabile in $p \in S_1$</u> se esistono carte locali (U_1, W_1, φ_1), (U_2, W_2, φ_2) di S_1 e S_2 rispett. con $p \in W_1$, $f(p) \in W_2$, tali che

$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ è differenziabile in $\varphi_1^{-1}(p)$ (è un'appl. definita fra due aperti di $\mathbb{R}^2$).

L'applicazione f si dice <u>differenziabile</u> se è differenziabile in p $\forall p \in S_1$.

4) L'appl. $f: S_1 \to S_2$ si dice <u>diffeomorfismo</u> se è differenziabile, biiettiva, e f^{-1} è differenziabile.

<u>Oss.:</u> 1) Se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile, allora $f|_S : S \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile.

2) Se $f: S_1 \to \mathbb{R}^3$ è differenziabile e $f(S_1) \subseteq S_2$, allora restringendo il codominio otteniamo $f: S_1 \to S_2$ differenziabile (verifica: esercizio).

<u>Esempi:</u> 1) $f: S \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p \cdot u$ (con $u \in \mathbb{R}^3$ fissato) è differenziabile.

2) $f: S \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \|p-u\|^2$

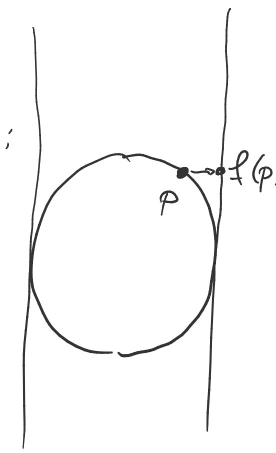
3) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z \notin \{1,-1\}\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

$$S_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1 \}$$

$$f : S_1 \longrightarrow S_2$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right)$$

in sezione:



Esercizio: verificare con carte locali che f è differenziabile.

Differenziali di applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e curve

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenziabile.

Il differenziale $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è dato da $v \longmapsto df_p(v) = Jf_p \cdot v$.

prodotto matrice per vettore colonna

Si può anche calcolare usando curve diff. contenenti p:

sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto p + tv$, allora $df_p(v) = \beta'(0)$ dove

$\beta(t) = f(\alpha(t))$ (per la derivazione di applicazioni composte, e perché $\alpha'(0) = v$). Lo stesso vale con qualsiasi $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tale che

$\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Definizione: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. immersa. Sia $p \in S$; lo **spazio tangente** a S in p è

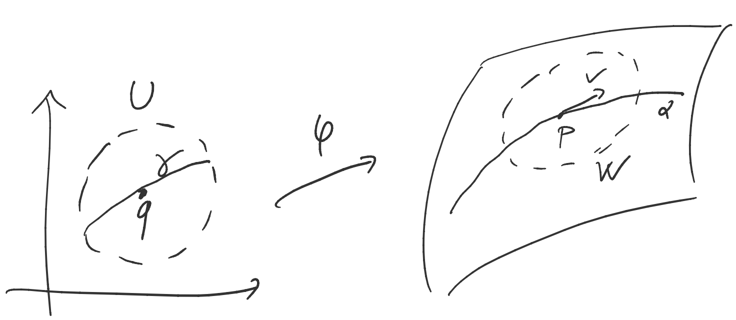
$$T_p S = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha : I \to S \text{ curva diff. parametrizzata con } \alpha(t_0) = p,\ \alpha'(t_0) = v \text{ per un } t_0 \in I \}$$

Proposizione: Sia S sup. diff. immersa in $\mathbb{R}^3$, $p \in S$, e sia (U, W, φ) carta locale con $W \ni p$. Allora

$$T_p S = \operatorname{Im}(d\varphi_q) \qquad \text{dove } q = \varphi^{-1}(p).$$

In particolare $T_p S$ è un sottospazio vettoriale di dim. 2 di $\mathbb{R}^3$.

Dim.: Sia $v \in T_p S$, e sia $\alpha : I \to S$ tale che $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$ per un $t_0 \in I$. Definiamo $\gamma : J \to U$ come $\gamma = \varphi^{-1} \circ \alpha$



dove $J = \alpha^{-1}(W)$.

Allora $d\varphi_q(\gamma'(t_0)) = v$.

Quindi $T_p S \subseteq \operatorname{Im}(d\varphi_q)$, sia ora $v \in \operatorname{Im}(d\varphi_q)$, consid.

Quindi $T_p S \subseteq \mathrm{Im}(d\varphi_q)$, sia ora $v \in \mathrm{Im}(d\varphi_q)$, consid.
$\omega : I \to U$ con $\omega(t_0) = q$ e $\omega'(t_0) = u$ con $d\varphi_q(u) = v$:

$d\varphi_q(u) = (\varphi \circ \omega)'(t_0) = v$ per quanto visto prima, cioè $v \in T_p S$.

$\square$

<u>Definizione</u>: Data $f : S_1 \to S_2$ appl. differenziabile fra sup. diff. immerse, definiamo il <u>differenziale di f</u> in $p \in S_1$ come l'applicazione $df_p : T_p S_1 \longrightarrow T_{f(p)} S_2$ definita nel modo seguente:
dato $v \in T_p S$ scegliamo $\alpha : I \to S_1$ tale che $\alpha(t_0) = p$, $\alpha'(t_0) = v$ per un $t_0 \in I$, e poniamo

$$df_p(v) = (f \circ \alpha)'(t_0).$$

<u>Esercizio</u>: Dimostrare che $df_p(v)$ è ben definito, cioè non dipende dalla scelta di α, e che df_p è un'applicazione lineare.

dalla scelta di α, e che df_p è un'applicazione lineare.

(Suggerimento: usare carte locali per scrivere df_p in termini di differenziali di applicazioni fra aperti di $\mathbb{R}^2$.)

I forma fondamentale

Def.: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. differenziabile immersa, e sia $p \in S$.

La 1ª forma fondamentale di S in p è

$$I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto \underbrace{v \cdot w}_{\text{prod. scalare in } \mathbb{R}^3}$$

(cioè la restrizione del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$ a T_pS).

Si chiama 1ª forma fondamentale anche la forma quadratica associata, e si denota con lo stesso simbolo:

$$I_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto I_p(v, v).$$

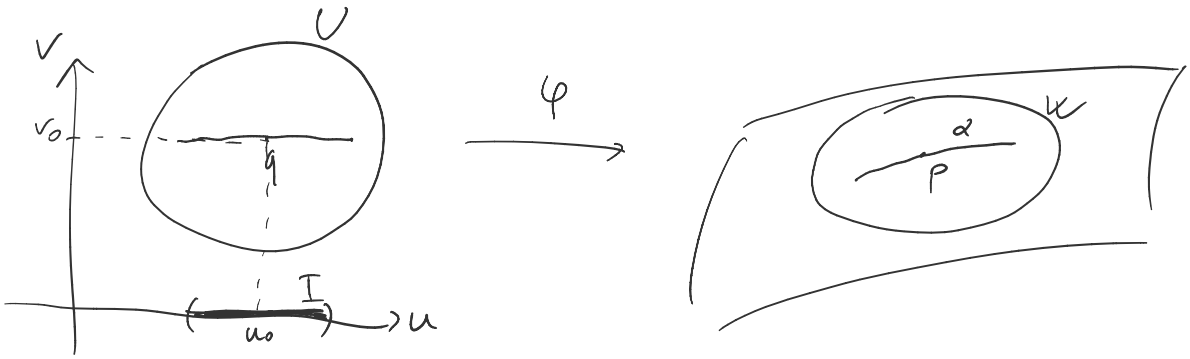
Def.: Sia $\varphi : U \to W$ carta locale di $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. immersa.

Sia $q \in U$, $p = \varphi(q)$, sia $q = (u_0, v_0)$. Si chiama

Sia $q \in U$, $p = \varphi(q)$, sia $q = (u_0, v_0)$. Si chiama <u>u-curva</u> (contenente p) la curva

$$\alpha : I \longrightarrow S$$
$$u \longmapsto \varphi(u, v_0)$$

dove I è un intervallo tale che $u_0 \in I$ e $I \times \{v_0\} \subseteq U$.



Si chiama <u>v-curva</u> (contenente p) la curva

$$\beta : J \longrightarrow S$$
$$v \longmapsto \varphi(u_0, v)$$

dove J è un intervallo tale che $v_0 \in J$ e $\{u_0\} \times J \subseteq U$.

Denotiamo anche $\alpha'(u_0) = X_u$ e $\beta'(v_0) = X_v$.

<u>Oss.:</u> 1) I vettori X_u, X_v sono una base di T_pS.

Inoltre $X_u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(q)$, $X_v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$.

Nel corso useremo anche la notazione $(-)_u = \dfrac{\partial (-)}{\partial u}$, quindi ad es. $X_{uu} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(q)$, ecc....

2) [illegible] notazione per la matrice della 1^a forma

2) E' utile avere una notazione per la matrice della 1ª forma fondamentale rispetto alla base (X_u, X_v) di T_pS:

$$\begin{pmatrix} X_u \cdot X_u & X_u \cdot X_v \\ X_v \cdot X_u & X_v \cdot X_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

(consideriamo E, F, G come funzioni $W \to \mathbb{R}$, dipendono anche dalla scelta di φ). Osserviamo anche che $E, G > 0$, e anche $EG - F^2 > 0$.

Def.: 1) Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sp. diff. immerse, e $F: S_1 \to S_2$ un diffeomorfismo. F si dice isometria se $\forall p \in S_1$ il differenziale $dF_p : T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$ è un'isometria di spazi euclidei, dove prendiamo le rispettive 1ª forme fondamentali sugli spazi tangenti.

2) Sia $F: S_1 \to S_2$ differenziabile. F si dice isometria locale se $\forall p \in S_1$ dF_p è un'isometria.

Oss.: Se F è un'isometria locale, allora conserva la lunghezza delle curve, cioè data $\alpha: I \to S_1$ curva diff. parametrizzata, e $t_0, t_1 \in I$, allora

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\underbrace{\alpha'(t)}_{\in T_{\alpha(t)} S_1}\| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\underbrace{I^{S_1}_{\alpha(t)}}_{\text{1ª forma fond. di } S^1}(\alpha'(t))} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I^{S_2}_{F(\alpha(t))}\big(\underbrace{(F\circ\alpha)'(t)}_{dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\big)} \, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|(F\circ\alpha)'(t)\| \, dt$$

cioè la lunghezza di α da t_0 a t_1 è uguale alla lunghezza di $F\circ\alpha$ da t_0 a t_1.

Vale anche il viceversa, cioè se $F: S_1 \to S_2$ è differenziabile e conserva la lunghezza delle curve, allora è un'isometria locale

(per dimostrare che $I^{S_1}_p(v) = I^{S_2}_{F(p)}(dF_p(v))$ basta prendere $\alpha: I \to S_1$ con $\alpha(t_0) = p$, $\alpha'(t_0) = v$ per un $t_0 \in I$, e derivare rispetto a t_1 l'uguaglianza derivare rispetto a t_1 l'uguaglianza

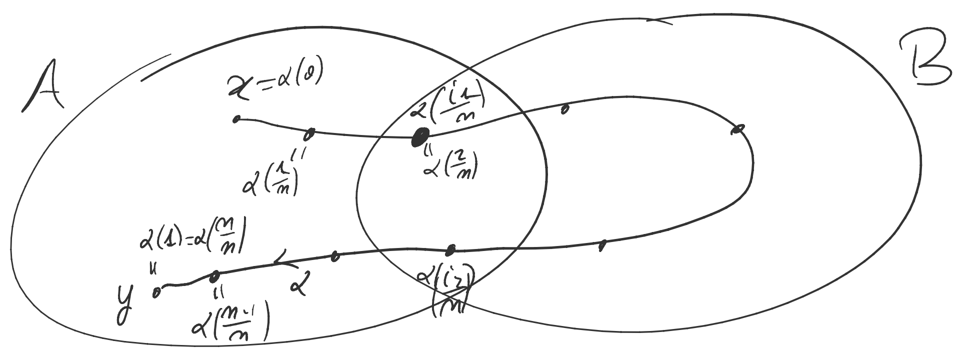
$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|(F\circ\alpha)'(t)\| dt \quad).$$

Esempi ed esercizi

Esercizio dato per casa: $X = A \cup B$ connesso per archi, A, B aperti, $A \cap B$ connesso per archi.

Dim. che A e B sono connessi per archi.

Svolgimento: Dim. che A è connesso per archi, siano $x, y \in A$ e troviamo un cammino in $\Omega(A, x, y)$.



Sia $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Per il corollario al teorema del numero di Lebesgue, esiste n intero positivo tale che

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq A \quad \text{opp.} \subseteq B \quad \forall i \in \{0, .., n-1\}$$

Sia i_1 il massimo intero tale che $\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq A$

Sia i_1 il massimo intero tale che $\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq A$

per ogni $i \in \{0, .., i_1 - 1\}$ (se $\alpha\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \subseteq A$), oppure

$i_1 = 0$ se $x \in A \cap B$ e $\alpha\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \subseteq B$.

Sia i_2 il minimo intero tale che $\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq A$

per ogni $i \in \{i_2, .., n-1\}$ (se $\alpha\left(\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right) \subseteq A$),

oppure $i_2 = n$ se $y \in A \cap B$ e $\alpha\left(\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right) \subseteq B$.

Sappiamo che $\alpha\left(\frac{i_1}{n}\right) \in A \cap B$ e $\alpha\left(\frac{i_2}{n}\right) \in A \cap B$, quindi

esiste $\beta \in \Omega\left(A \cap B, \alpha\left(\frac{i_1}{n}\right), \alpha\left(\frac{i_2}{n}\right)\right)$.

Allora troviamo un cammino in A da x a y facendo

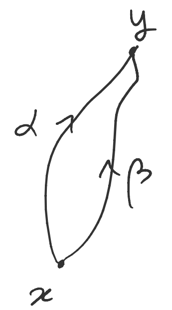
$$\tilde{\alpha} * \beta * \bar{\alpha}$$

dove $\tilde{\alpha}$ è α da 0 a $\frac{i_1}{n}$ e $\bar{\alpha}$ è α da $\frac{i_2}{n}$ a 1.

<u>Esercizio</u>: Sia X spazio topologico e $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$.

Allora $\alpha \sim \beta$ se e solo se $\alpha * i(\beta) \sim 1_x$.

Svolgimento:



Supponiamo $\alpha \sim \beta$, allora

$$\alpha * i(\beta) \sim \beta * i(\beta) \quad e$$

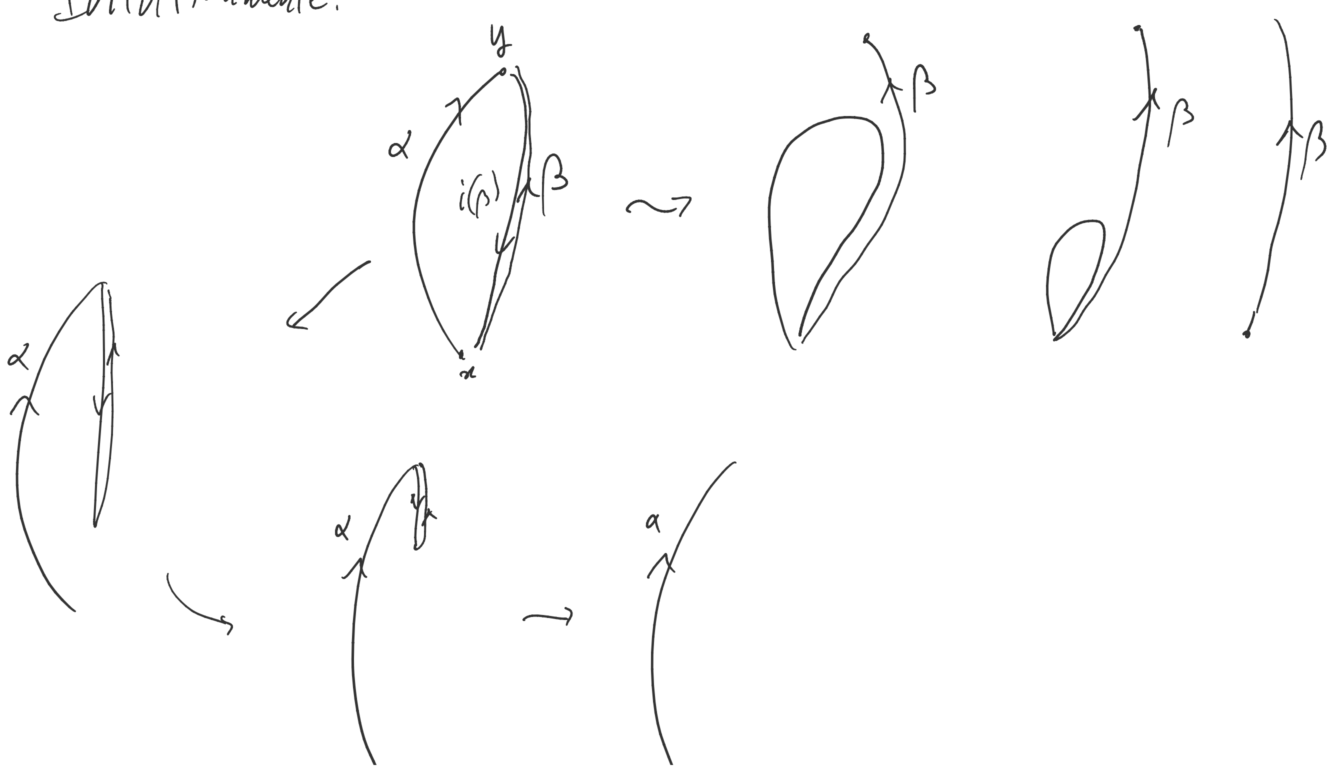
sappiamo già $\beta * i(\beta) \sim 1_x$.

Supponiamo ora $\alpha * i(\beta) \sim 1_x$. Allora

$$\alpha * \underbrace{i(\beta) * \beta}_{\sim 1_y} \sim 1_x * \beta$$

e $\alpha * 1_y \sim \alpha$, $1_x * \beta \sim \beta$. Quindi $\alpha \sim \beta$.

Intuitivamente:



<u>Esercizio per casa:</u> Sia E spazio topologico di Hausdorff.

Sia $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ sottogruppo. Supponiamo:

1) G finito

2) G agisce <u>liberamente</u> su E, cioè

$\forall e \in E \ \forall g \in G: \ g(e) \neq e$ se $g \neq Id_E$.

Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo.