Geometria 2, Lezione 30

Monday, 31 May 2021 06:44

Esercizio dato per casa: 1) Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\pi_1(S^1)$ $(\cong \mathbb{Z})$, esiste $E \xrightarrow{p} S^1$ rivestimento connesso tale che $p_*(\pi_1(E)) = H$.

2) Dimostrare che si ottengono in questo modo (cioè dando un rivestimento per ciascun sottogruppo) tutti i rivestimenti di S^1 (a meno di identificare $E_1 \xrightarrow{p_1} S^1$ con $E_2 \xrightarrow{p_2} S^1$ se esiste $f: E_1 \to E_2$ omeomorfismo tale che

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & S^1 & \end{tikzcd} \qquad p_1 = p_2 \circ f \quad)$$

Svolgimento: 1) Sia $H \subseteq \pi_1(S^1)$, allora esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $H = n\mathbb{Z}$ (fissando un isomorfismo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$).

Se $n=0$, cioè $H = \{0\}$, allora posso prendere $E = \mathbb{R}$, p = rivestimento solito. Allora $\pi_1(E)$ è banale, e anche $p_*(\pi_1(E))$.

Se $n \neq 0$ possiamo supporre $n > 0$ e prendere $E = S^1$

Se $n \neq 0$ possiamo supporre $n > 0$, e prendere $E = S^1$

$$p : S^1 \longrightarrow S^1 \qquad \left(S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \right)$$
$$z \longmapsto z^n$$

cioè prendo S^1 che si avvolge su se stessa n volte.

Prendo $[\alpha] \in \pi_1(\underset{S^1}{\overset{\shortparallel}{E}})$ generatore, con α che percorre E in senso antiorario una volta. Allora $p_*([\alpha]) = [p \circ \alpha]$, e $p \circ \alpha$ percorre S^1 in senso antiorario n volte, quindi $p_*(\pi_1(E)) = n\mathbb{Z}$.

2) Sia $E \xrightarrow{p} S^1$ rivestimento connesso. Segue che E è localmente connesso per archi, e abb. visto che allora è connesso per archi. Consid. $p_*(\pi_1(E))$ e scegliamo $E' \xrightarrow{p'} S^1$ rivestim. dal punto 1) tale che $p_*(\pi_1(E')) = p_*(\pi_1(E))$.

Abbiamo.

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ E \arrow[r, "p"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Per il solleram. di applicazioni qualsiasi, esistono $f: E \to E'$ che solleva p, e $g: E' \to E$ che solleva p':

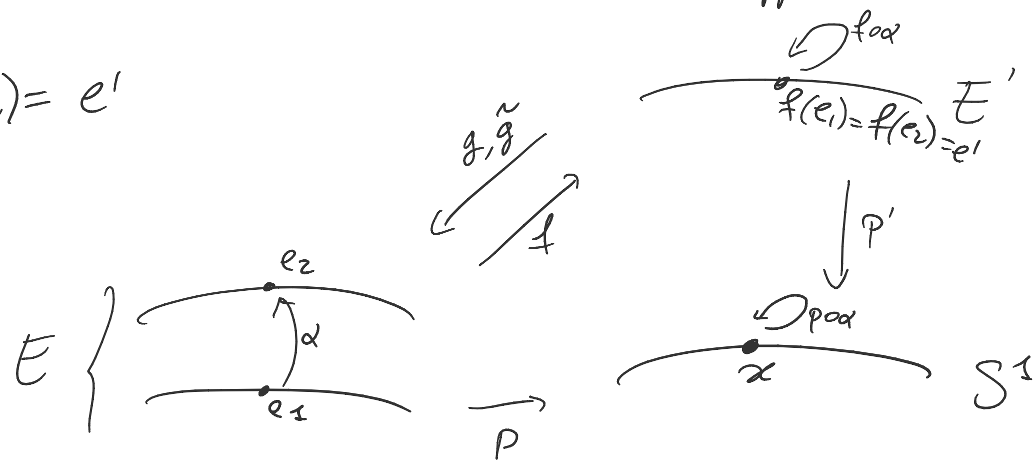
$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dl, shift left, "g"'] \arrow[d, "p'"] \\ E \arrow[ur, shift left, "f"'] \arrow[r, "p"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

più precisamente, scegliamo $e_0 \in E$, $e_0' \in E'$ in modo tale che $p(e_0) = x_0 = p'(e_0')$, allora esistono sollevamenti f e g come prima con $f(e_0) = e_0'$, $g(e_0') = e_0$.

Dimostriamo che f è biiettiva.

<u>Iniettività:</u> Siano $e_1, e_2 \in E$, per assurdo supponiamo

$f(e_1) = f(e_2) = e'$



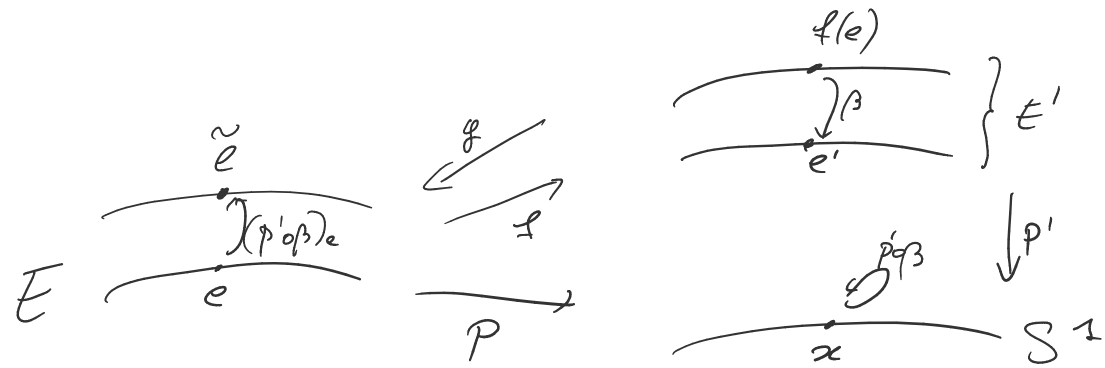
Denotiamo $x = p'(e')$.

Prendiamo $\alpha \in \Omega(E, e_1, e_2)$, allora $f \circ \alpha$ è un cammino

Prendiamo $\alpha \in \Omega(E, e_1, e_2)$, allora $f \circ \alpha$ è un cammino chiuso, e allora anche $p \circ \alpha$. Vogliamo osservare che $g \circ (f \circ \alpha)$ solleva il cammino $p \circ \alpha$. Può darsi però che g non manda e' in e_1, ma possiamo scegliere per il solleram. di appl. qualsiasi una $\tilde{g}$ che solleva p' e tale che $\tilde{g}(e') = e_1$.

Allora abb.: $\tilde{g} \circ (f \circ \alpha)$ solleva $p \circ \alpha$, per l'unicità del solleram. di cammini abbiamo $\tilde{g} \circ f \circ \alpha = \alpha$. Ma $f \circ \alpha$ è cammino chiuso, quindi anche $\tilde{g} \circ f \circ \alpha$: assurdo. Cioè f è iniettiva.

<u>Suriettività</u>: Sia $e' \in E'$, scriviamo $x = p'(e')$, scegliamo $e \in E$ con $p(e) = x$



Allora $f(e)$ non è necessariam. e', ma è nella fibra $(p')^{-1}(x)$.

Scegliamo $\beta \in \Omega(E', f(e), e')$, consid. $p' \circ \beta \in \Omega(S^1, x, x)$, e il sollevamento $(p' \circ \beta)_e$ di β a E partendo da e.

Allora $f \circ (p' \circ \beta)_e$ è un cammino in E' che solleva $p' \circ \beta$

Allora $f\circ(p'\circ\beta)_e$ è un cammino in E' che solleva $p'\circ\beta$ partendo da $f(e)$. Per l'unicità del solleram. dei cammini, $f\circ(p'\circ\beta)_e = \beta$.

D'altronde $\beta(1) = e'$; allora e' appartiene all'immagine di f.

Cioè f è suriettiva.

Infine f è continua, ed è un omeomorfismo locale (perché restringendo ad aperti $U \subseteq E$, $U' \subseteq E'$, $V \subseteq S^1$ della def. di rivestimento, abb. $f|_U : U \to U'$ è omeomorfismo).

Quindi f è anche aperta, e allora è l'omeomorfismo cercato.

Superfici in $\mathbb{R}^3$

Cioè consideriamo varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^3$, di dimensione 2.

Teorema: Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, sia $f: U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, $d \in f(U)$, e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = d\}$.

Se $df_p \neq 0$ $\forall p \in S$ allora S è una superficie diff.

immersa in $\mathbb{R}^3$.

(oss.: df_p è l'applicaz. lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice è ∇f_p rispetto alle basi canoniche)

<u>Esempio</u>: Sfera di raggio $r>0$: data da $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, ponendo $S = \{f(x,y,z) = r^2\}$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$ e quindi ∇f_p è diverso dal vettore nullo $\forall p \in S$ (perché $(0,0,0) \notin S$).

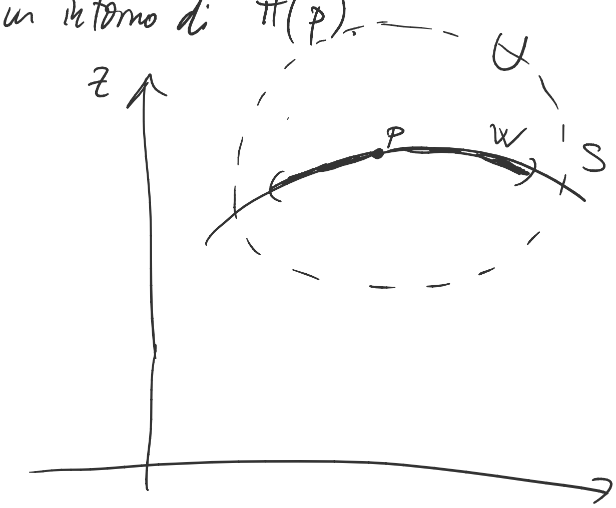
Per la dim. del teorema, usiamo:

<u>Teorema</u> (della funzione inversa): Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F: U \to \mathbb{R}^n$ C^∞, e sia $p \in U$ tale che dF_p è un isomorfismo lineare (cioè $\det(JF_p) \neq 0$), allora esistono $V \subseteq U$ intorno aperto di p tale che $F|_V : V \to F(V)$ è biiettiva, $F(V)$ è un aperto, ed $(F|_V)^{-1} : F(V) \to V$ è differenziabile, con differenziale $d\left((F|_V)^{-1}\right)_{F(p)} = \left(d(F|_V)_p\right)^{-1}$.

con differenziale $d\left((F|_V)^{-1}\right)_{F(p)} = \left(d(F|_V)_p\right)^{-1}$.

(senza dimostrazione)

<u>Dim. del 1° teorema:</u> Scegliamo $p \in S$, facciamo vedere che esiste una carta locale di Monge in un intorno di p. Possiamo assumere $d=0$, e $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (altrim. è $\neq 0$ un'altra delle derivate parziali, e il ragionam. è simile). Vogliamo far vedere che in un intorno W di p su S, la proiezione $\pi : W \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ ha inversa π^{-1} che è una carta locale di Monge, cioè vogliamo che esista $g : (\text{ap. di } \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x,y,g(x,y)) = 0$ e g di classe C^∞, definita in un intorno di $\pi(p)$.



Usiamo il teorema delle f.ni implicite, scegliamo U intorno di p in $\mathbb{R}^3$ tale che $\frac{\partial f}{\partial z}(q) \neq 0$ $\forall q \in U$,

consideriamo $F : U \to \mathbb{R}^3$

considero $F: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,f(x,y,z))$$

Allora:

$$JF_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(q) & \frac{\partial f}{\partial y}(q) & \frac{\partial f}{\partial z}(q) \end{pmatrix}$$

quindi $\forall q \in U$ la matrice JF_q ha det. $\neq 0$. Per il teorema della f.ne inversa, esiste $V \subseteq U$ intorno di p in $\mathbb{R}^3$ tale che

$F|_V : V \to F(V)$ è biiettiva, C^∞, con inversa C^∞ (e $F(V)$ aperto). D'altronde F^{-1} è del tipo

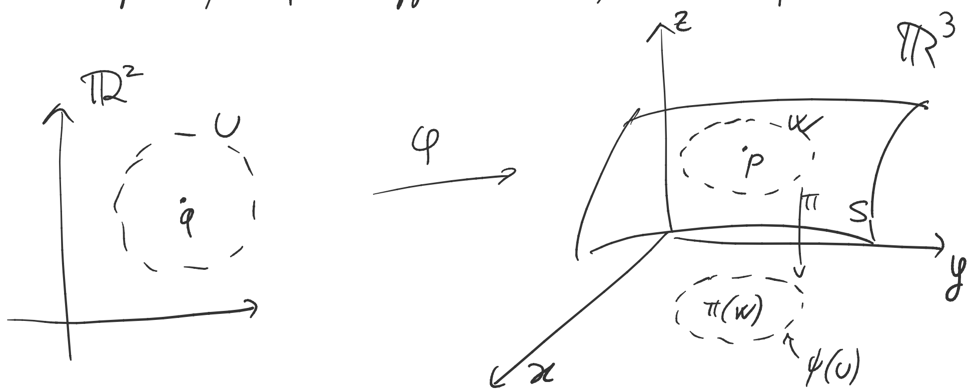
$$F^{-1}(x,y,z') = (x,y,h(x,y,z'))$$

Poniamo $U' = \pi(F(V))$ aperto di $\mathbb{R}^2$, e $g: U' \to \mathbb{R}$
$$(x,y) \longmapsto h(x,y,0)$$

Allora $f(x,y,g(x,y)) = 0$, e g è C^∞, e allora S in un intorno di p è il grafico di g, cioè abb. trovato la param. di Monge cercata. $\square$

Teorema: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa. Esistono carte locali di Monge per ogni punto di S.

Dim.: Sia $p \in S$ e sia $\varphi : U \to W$ carta locale, cioè $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, φ differenziabile, $W \ni p$.



Sappiamo che la matrice $J\varphi_q$ ha rango 2 (dove $q = \varphi^{-1}(p)$):

$$J\varphi_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(q) \end{pmatrix}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono le componenti di φ.

Scegliamo un minore 2×2 invertibile, sia ad es. $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(q) \end{pmatrix}$

e consid. $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (x,y)$. Allora $\pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^2$,

e a meno di restringere U posso supporre $\psi = \pi \circ \varphi : U \longrightarrow \psi(U)$

e a meno di restringere U posso supporre $\psi = \pi \circ \varphi : U \to \psi(U)$ biiettiva, con inversa differenziabile (e $\psi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto).

Consid. $\psi^{-1} : \psi(U) \to U$, allora $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to W$

è una carta locale di Monge (perché sia ψ^{-1} sia φ sono biiettive, C^∞, con inversa continua). E' di Monge perché presa

$\pi|_W : W \to \pi(W)$, allora

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \left(\pi \circ \varphi\right)^{-1} = \varphi \circ \left(\left(\pi|_W\right) \circ \varphi\right)^{-1} =$$

$$\cancel{\varphi \circ \varphi^{-1}} \circ \left(\pi|_W\right)^{-1} = \left(\pi|_W\right)^{-1}.$$

Cioè $\varphi \circ \psi^{-1}$ è proprio l'inversa della proiezione π. $\square$

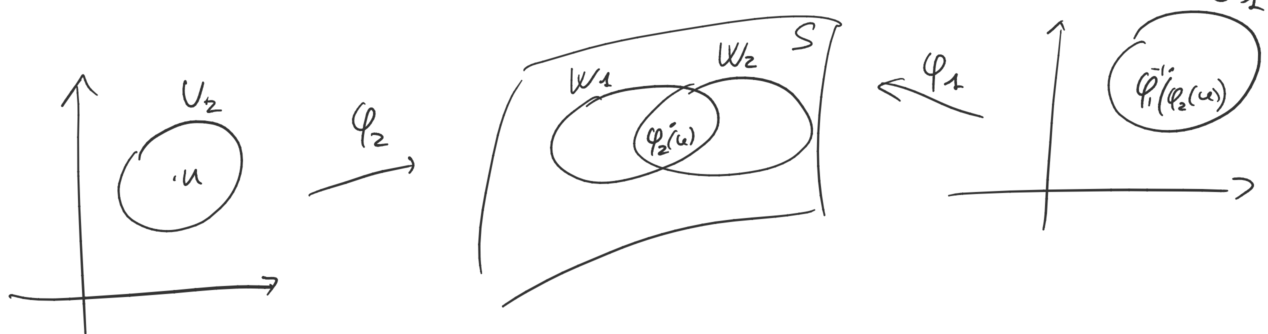
<u>Corollario:</u> Ogni superficie diff. immersa in $\mathbb{R}^3$ è una varietà diff. (secondo la def. generale) di dim. 2.

<u>Dim.:</u> Sappiamo dal teorema che ogni punto di $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. immersa ha una carta locale di Monge. Ora, sia $\varphi : U \to W$ carta locale di S, e sia $\psi : U' \to W'$ carta locale di Monge. Allora $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W \cap W') \to \psi(W \cap W')$

$\varphi: U \to W$ [illegible]

carta locale di Monge. Allora $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W \cap W') \to \psi(W \cap W')$ è C^∞, perché ψ^{-1} è la restrizione di una proiezione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ su due delle coordinate. Segue anche che $(\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1}$ è C^∞.

Siano adesso $\varphi_1 : U_1 \to W_1$, $\varphi_2 : U_2 \to W_2$ carte locali qualsiasi. Dobb. dimostrare che $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(W_1 \cap W_2) \to \varphi_1(W_1 \cap W_2)$ è C^∞, lo dimostriamo in ogni $u \in \varphi_2^{-1}(W_1 \cap W_2)$,



Sia $\varphi_3 : U_3 \to W_3$ carta locale di Monge con $W_3 \ni \varphi_2(u)$, allora poss. scrivere

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3\right) \circ \left(\varphi_3^{-1} \circ \varphi_2\right)$$

restringendo opportunamente i domini. Visto che $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3$ e $\varphi_3^{-1} \circ \varphi_2$ sono C^∞, allora $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ è C^∞. $\square$

Esercizio: Dimostrare che ogni var. diff. immersa in $\mathbb{R}^n$ di dim. m è una var diff. di dimensione m.

è una var diff. di dimensione m.

<u>Oss.:</u> La terminologia in inglese è spesso diversa. Di solito il nostro „immersa" si traduce come „embedded", ma esistono anche varietà „immersed", che è una condizione più debole di „embedded" e che non ha una controparte in italiano.

Un esempio di varietà immersed ma non embedded è l'immagine di $(\sin(t), \sin(2t))$ in $\mathbb{R}^2$ già vista.