Geometria 2, Lezione3

Tuesday, 2 March 2021 13:32

Parte interna, chiusura, intorni

Def.: Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, e $B \subseteq X$.

Definiamo:

1) B° = parte interna di B = $\displaystyle\bigcup_{\substack{A \subseteq B \\ A \text{ aperto}}} A$

2) $\overline{B}$ = chiusura di B = $\displaystyle\bigcap_{\substack{C \supseteq B \\ C \text{ chiuso}}} C$

3) ∂B = frontiera di B = $\overline{B} \setminus B^\circ$

I punti di B° si dicono interni a B, e i punti di $\overline{B}$ si dicono aderenti a B.

Oss.: 1) ∂B è chiusa, perché
$$\partial B = \overline{B} \cap \Big(\underbrace{X \setminus B^\circ}_{\text{chiuso}}\Big)$$

2) B aperto $\Longleftrightarrow B = B^\circ$,
B chiuso $\Longleftrightarrow B = \overline{B}$

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea
$$B = [0,1]$$
$$B^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq [0,1] \\ A \text{ aperto}}} A \supseteq \underbrace{]0,1[}_{\text{aperto, contenuto in } B}$$

D'altronde $0 \notin B^\circ$, perché se fosse in B° allora esisterebbe un intervallo ap. contenente 0 e contenuto in B: assurdo. Analogamente: $1 \notin B^\circ$, quindi $B^\circ =]0,1[$.

Esercizio: dimostrare che $\overline{]0,1[} = [0,1]$

2) $X = \mathbb{R}$ topologia cofinita

2) $X=\mathbb{R}$, topologia cofinita.

$B=[0,1] \qquad B^\circ=\emptyset$

3) $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{T}=$ topologia vista a lez. n. 2:

A aperto se $A=\emptyset$ oppure

A aperto in top. euclidea e $A\ni 0$.

$$\overline{\{0\}}=X$$

$$\overline{\{1\}}=\{1\}$$

<u>Def.</u>: $B\subseteq X$ è <u>denso</u> se $\overline{B}=X$.

<u>Esempio</u>: $X=\mathbb{R}$ con topologia euclidea $B=\mathbb{Q}$.

Dimostriamo che $\overline{B}=\mathbb{R}$, cioè che B è denso.

Sia $C(\supseteq B)$ chiuso, allora $X\setminus C$ è aperto. Se $x\in X\setminus C$, allora esiste un intervallo aperto. [illegible]

aperto contenente x e contenuto in $X \setminus C$ (perché $X \setminus C$ dev'essere unione di intervalli aperti).

Ma ogni intervallo aperto (non vuoto) contiene elem. di $\mathbb{Q}$, quindi x non può esistere. Segue: $X \setminus C = \emptyset$, cioè $C = X$. Allora $\overline{B} = X$.

<u>Oss.:</u> $B \subseteq X$. Vale:

B è denso in X $\Longleftrightarrow$ B interseca <u>ogni</u> aperto non vuoto di X

perché $\overline{B} = X \Longleftrightarrow$ nessun chiuso proprio contiene B $\Longleftrightarrow$

tutti gli aperti non vuoti intersecano B

<u>Esempi:</u> 1) Se X ha topologia banale, ogni sottoinsieme non vuoto è denso.

2) Se X ha topologia cofinita, ogni sottoinsieme infinito è denso.

infinito è denso.

<u>Def.</u>: Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, e $x \in X$.
Un sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice <u>intorno</u> di x se esiste $A \subseteq X$ aperto tale che $x \in A \subseteq U$.

Definiamo $\quad \mathcal{I}(x) = \{ U \text{ intorno di } x \}$

<u>Esempio</u>: $X = \mathbb{R}$, con topologia euclidea

$U = \,]0,1[\,$ è un intorno di $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

$V = [0,1]$ ——— , ——— $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} [0,1] \\ \cup\! | \\ ]0,1[\ni \frac{1}{2} \end{array}$$

<u>Oss.</u>: 1) U intorno di $x \iff x$ è un punto <u>interno</u> di U

2) B è aperto $\iff B$ è intorno di ogni suo punto

2) D è aperto $\Longleftrightarrow$ D è intorno di ogni suo punto

esercizio

<u>Lemma:</u> 1) Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \supseteq U$ allora $V \in \mathcal{I}(x)$

2) Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$ allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$

<u>Dim.:</u> 1) Se $U \in \mathcal{I}(x)$ allora esiste A aperto tale che $x \in A \subseteq U \; (\subseteq V)$

segue: V è un intorno di x.

2) Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$ allora esistono A, B aperti tali che $x \in A \subseteq U$, $x \in B \subseteq V$

allora $x \in \underset{\text{aperto}}{A \cap B} \subseteq U \cap V$

$\square$

Lemma: Sia $B \subseteq X$. Allora

$$x \in \overline{B} \iff \forall U \in \mathcal{I}(x):\ U \cap B \neq \emptyset.$$

Dim.: Usiamo $X \setminus \overline{B} = (X \setminus B)^\circ$.

Vale:

$x \notin \overline{B} \iff x$ interno a $X \setminus B \iff \exists U \in \mathcal{I}(x)$ tale che $U \cap B = \emptyset$.

$\square$

Def.: Sia $x \in X$, e $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}(x)$. Allora $\mathcal{J}$ si dice <u>base locale</u> (in x) o <u>sistema fondamentale di intorni di x</u> se

$$\forall U \in \mathcal{I}(x)\ \exists A \in \mathcal{J} \mid A \subseteq U.$$

Esempi: 1) $\mathcal{I}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di x

di x.

2) $\mathcal{J} = \{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$

è un sistema fondam. di intorni di 0 in $\mathbb{R}$ con topologia euclidea

$\mathcal{J}' = \{ [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$ anche.

Applicazioni continue

Def.: Siano X e Y due spazi topologici.

Un'applicazione $f: X \to Y$ si dice continua se $f^{-1}(A)$ aperto $\forall A$ aperto di Y.

Es.: 1) Se X ha topologia discreta allora ogni f è continua.

2) $f: X \to Y$ biiettiva, X e Y con topologica

2) $f: X \to Y$ biiettiva, X e Y con topologica cofinita, allora f è continua

<u>Oss.</u>: Per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$ vale

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

per qualsiasi applicazione $f: X \to Y$

Per ogni famiglia $\{A_i\}$ di sottoinsiemi di Y, vale

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$$

<u>Segue</u>: 1) f è continua $\iff$ $f^{-1}(C)$ chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso

2) f è continua $\iff$ $f^{-1}(A)$ aperto $\forall A \in \mathcal{B}$ (dove $\mathcal{B}$ è una base della topologia su Y).

<u>Lemma</u>: Siano X, Y spazi topologici, $f: X \to Y$ un'appl.. Vale:

f continua $\iff$ $\forall A \subseteq X$ vale

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

<u>Dim.</u>: $\Rightarrow$) Sia f continua.

Consid. $f^{-1}(\underbrace{\overline{f(A)}}_{\text{chiuso}})$, è chiuso di X.

Inoltre $\overline{f(A)}$ contiene $f(A)$, quindi $f^{-1}(\overline{f(A)})$ contiene A.

Allora $f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq \overline{A}$

Facendo f ottengo: $f(f^{-1}(\overline{f(A)})) =$

$$= \overline{f(A)} \cap \operatorname{Im}(f) \supseteq f(\overline{A})$$

Segue $\overline{f(A)} \supseteq f(\overline{A})$.

$\Leftarrow$) Supponiamo $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, dim. che f è continua.

Dimostriamo che $f^{-1}(C)$ è chiuso per ogni $C \subseteq Y$ chiuso. Abb.:

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} =$$

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} =$$

$$= \overline{f(X) \cap C} \subseteq C$$

perché C è chiuso e contiene $f(X) \cap C$

Segue:

$$\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$$

Ma $\overline{f^{-1}(C)} \supseteq f^{-1}(C)$ in generale, per cui $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$, cioè $f^{-1}(C)$ è chiuso.

$\square$

Oss.: Il lemma dice: f continua $\Longleftrightarrow$ se x è aderente ad $A \subseteq X$ allora $f(x)$ è aderente a $f(A)$.

Proposizione: Composizioni di applicazioni continue sono continue.

Dim.: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ $\quad f, g$ continue

spazi topologici

Da dim.: $g \circ f$ continua

Sia $A \subseteq Z$ aperto, consid.

$$(g \circ f)^{-1}(A) = (f^{-1} \circ g^{-1})(A) =$$

$$f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(A)}_{\text{aperto in } Y}) = \text{aperto in } X.$$

$\square$

Def: Siano X, Y spazi topologici, $f: X \to Y$ applicazione.

Sia $x \in X$, allora f si dice <u>continua</u> in x se $\forall U$ intorno di $f(x)$ in Y $\exists V$ intorno di x in X tale che $f(V) \subseteq U$.

<u>Teorema</u>: Siano X, Y spazi topologici, $f: X \to Y$.

f è continua $\Longleftrightarrow$ f è continua in x $\forall x \in X$.

<u>Dim.</u> $\Rightarrow$) Sia f continua, e siano $x \in X$ e $U \subseteq Y$ intorno di $f(x)$. Allora esiste $A \subseteq Y$ aperto tale che $f(x) \in A \subseteq U$.
Allora $f^{-1}(A)$ aperto, contiene x, e $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$. Quindi possiamo scegliere $V = f^{-1}(A)$, e allora f è continua in x.

$\Leftarrow$) Supponiamo f continua in x $\forall x \in X$, sia A aperto di Y. Dim. che $f^{-1}(A)$ è aperto, facendo vedere che è intorno di ciascun suo punto.
Sia $x \in f^{-1}(A)$. Allora $f(x) \in A$, e A è un intorno di $f(x)$, quindi esiste un intorno V di x in X tale che $f(V) \subseteq A$.
Segue: $V \subseteq f^{-1}(A)$. allora anche $f^{-1}(A)$ è

Segue: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{intorno di } x}}{V} \subseteq f^{-1}(A)$, allora anche $f^{-1}(A)$ è

un intorno di x.

$\square$

<u>Def.</u>: Siano X, Y spazi topologici, $f: X \to Y$ applicazione.

1) f si dice <u>omeomorfismo</u> se f è biiettiva, continua, e f^{-1} è continua.

In tal caso X e Y si dicono omeomorfi.

(<u>Oss.</u>: Visto che $id_X: X \to X$ è un omeomorfismo, e composizioni di omeomorfismi sono omeomorfismi, si dim. facilmente che l'omeomorfismo è una relaz. d'equivalenza.)

2) f si dice <u>aperta</u> se $f(A)$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto.

f si dice <u>chiusa</u> se $f(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq X$ chiuso.

<u>Esempi ed esercizi</u>

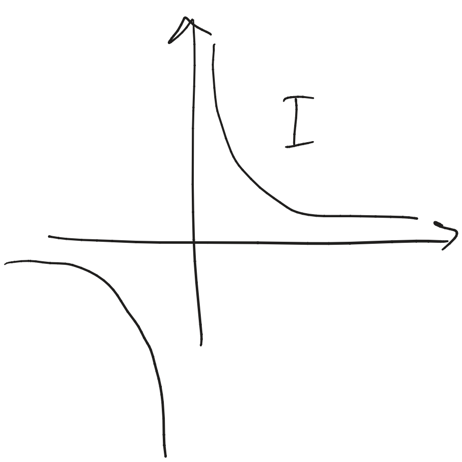
Esempi ed esercizi

Esempio: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ proiezione sulla prima componente

($\mathbb{R}^2$: topologia di Zariski; $\mathbb{R}$: topologia euclidea)

Questa f è un esempio importante di applicazione non chiusa (lo è anche quando prenderemo su $\mathbb{R}^2$ la top. euclidea). Ad es.

$I = \{ xy = 1 \}$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$



$f(I) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso.

Esempio: Topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.

Sia

$$\mathcal{B} = \{ [a, b[\mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b \}$$

$\mathcal{B}$ è una base di una topologia su $\mathbb{R}$ detta di

$\mathcal{B}$ è una base di una topologia su $\mathbb{R}$, detta di <u>Sorgenfrey</u>. Verifichiamolo usando la prop.:

verifichiamo le due condizioni:

1) $\mathbb{R} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ vero perché

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} [-n, n[$$

2) Siano $[a,b[\,,\ [c,d[\ \in \mathcal{B}$

Allora $$[a,b[\ \cap\ [c,d[\ = \begin{cases} \emptyset & \text{oppure} \\ [\max\{a,c\}, \min\{b,d\}[\end{cases}$$

Sia $\mathcal{T}_s$ la topologia di Sorgenfrey. Allora $\mathcal{T}_s$ è più fine della top. euclidea su $\mathbb{R}$. Verifichiamolo:

basta verificare che un intervallo ap. è aperto per $\mathcal{T}_s$ (perché gli intervalli aperti sono una base

T_s (perché gli intervalli aperti sono una base della top. euclidea)

Abb.: $\quad]a,b[\; = \underbrace{\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z}_{>0} \\ a+\frac{1}{n}<b}} [a+\tfrac{1}{n}, b[}_{\text{aperto di } T_s} \qquad (a,b \in \mathbb{R})$

(analogam. per $]-\infty, b[$ e $]a,+\infty[$)

Consid. $[0,1]$. In top. euclidea: $[0,1]^\circ =]0,1[$

In topologia di Sorgenfrey $[0,1[$ è aperto, e vale $[0,1]^\circ = [0,1[$ in topologia di Sorgenfrey.

Verifica: sicuramente $[0,1]^\circ \supseteq [0,1[$, c'è solo da chiedersi se $1 \in [0,1]^\circ$.

Ma se avessi $1 \in [0,1]^\circ$ allora esisterebbe $[a,b[\in \mathcal{B}$ tale che $1 \in [a,b[\subseteq [0,1]$ assurdo.

Altra osservazione: $[0,1[$ è aperto

(II) $\Rightarrow$ $[0,1[\; = \;]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

$$\mathbb{R} \setminus [0,1[\;=\; \underbrace{]-\infty, 0[}\; \cup \;\underbrace{[1, +\infty[}$$

è chiuso. Ma $]-\infty, 0[$ e $[1, +\infty[$ sono anche aperti!

Allora $[0,1[$ è sia aperto sia chiuso in $\mathcal{T}_s$.

<u>Esercizio</u>: Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato.

Dato $x \in X$ definiamo $M_x = \{ y \in X \mid x \leq y \}$

Dim. che $\{ M_x \mid x \in X \}$ è base di una topologia.

<u>Svolgimento</u>: Verifichiamo le condiz. 1) e 2) della proposizione della lez. 2.

1) $$X \overset{(?)}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A = \bigcup_{x \in X} M_x$$

Vera perché $x \in M_x$.

2) Siano $M_x, M_y \in \mathcal{B}$, devo verificare

e) Siano $M_x, M_y \in \mathcal{B}$, dobbiamo verificare

che $\forall z \in \underbrace{M_x \cap M_y}$ abb. $\exists C \in \mathcal{B}$ tale

che $C \ni z$ e $C \subseteq M_x \cap M_y$.

Proviamo con $C = M_z$. Vale $M_z \ni z$, ok,

e ci chiediamo se $M_z \overset{(?)}{\subseteq} M_x \cap M_y$

ma questo è vero perché $z \in M_x \cap M_y$ quindi

$z \geq x$ e $z \geq y$, e se $w \in M_z$ abb. $w \geq z$ e

quindi $w \geq x$ e $w \geq y$.

$\square$

Esercizio: Sia $X = \mathbb{R}$ la fam. di sottoinsiemi

$$\mathcal{B} = \{]a,b[\mid a < b \in \mathbb{R} \} \cup \{]a,b[\setminus Z \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

dove $Z = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$

Da dim.: $\mathcal{B}$ è base di una topologia

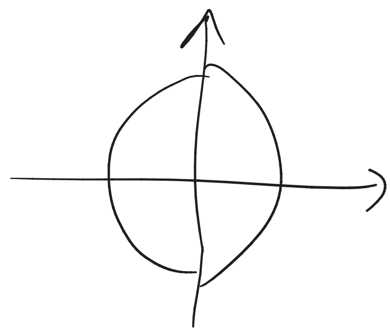
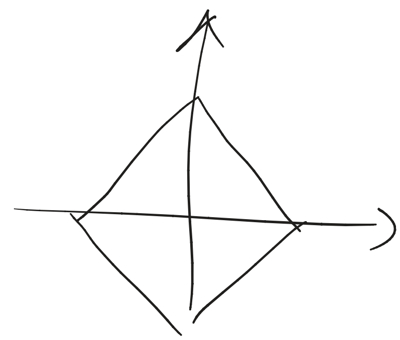
strettamente più fine della top. euclidea.

da fare per casa

Da fare per casa!

Esempi di omeomorfismi fra sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

(prendiamo la top. euclidea su $\mathbb{R}^n$, come data nella prima lezione, e la rivedremo anche più avanti)

1)  

cerchio e quadrato sono omeomorfi

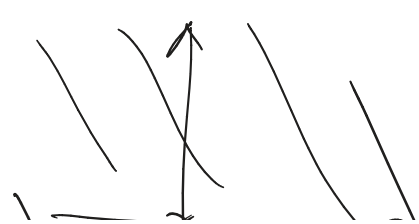
$$S^1 = \text{cerchio} = \{x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

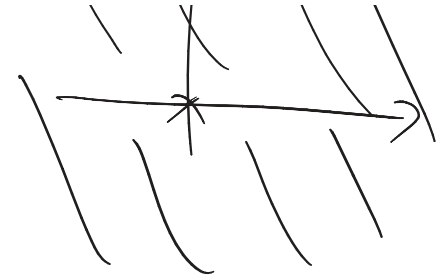
$$Q = \text{quadrato} = \{|x|+|y|=1\}$$

Omeomorfismo $f: S^1 \longrightarrow Q$

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right)$$

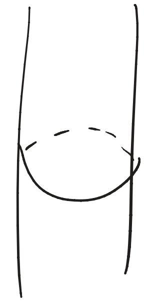
2) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$





è omeomorfo a

$$Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$$



omeomorfismo

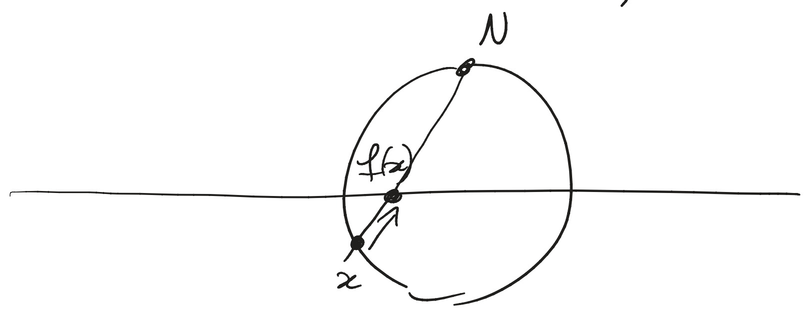
$$Y \longrightarrow X$$

$$(x,y,z)\longmapsto (xe^z,\ ye^z)$$

3) Proiezione stereografica

$$S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1\}$$

$$N=(1,0,\dots,0)$$



f è un omeomorfismo

$$S^n\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

$$f(x_1,\dots,x_{n+1})=\frac{1}{1-x_1}(x_2,\dots,x_n)$$

$$T(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\quad}{1 - x_1}(x_2, \ldots, x_n)$$