Geometria 2, Lezione 29

Thursday, 27 May 2021 09:13

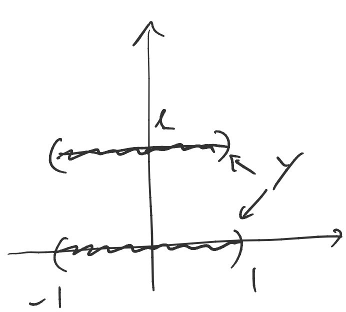
Varietà topologiche e differenziabili

Definizione: Uno spazio topologico X è detto varietà topologica di dimensione n se:

1) per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto W di x e un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e un omeomorfismo $\varphi: U \to W$ (la tripla (U, W, φ) è detta carta locale di X in x),
2) X è di Hausdorff,
3) X è 2°-numerabile.

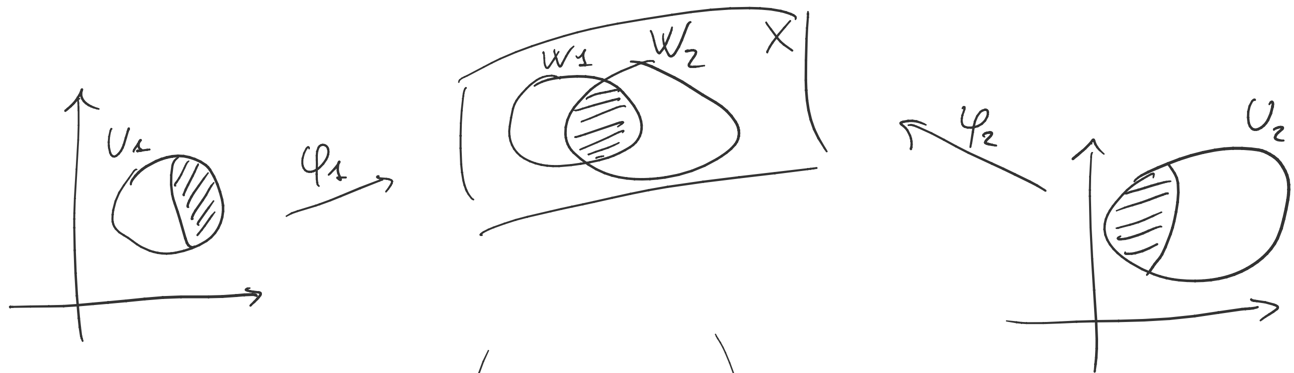
In tal caso la collezione delle carte locali (U, W, φ) si dice atlante di X.

Esempio: La condizione 2) non segue dalla 1), ad es. $Y =]-1, 1[\times \{0, 1\}$ e consid. $\sim$ su Y che identifica $(x, 0)$ e $(x, 1)$ $\forall x \in]-1, 1[$ tranne $x = 0$.



Il quoziente $X = Y/\sim$ soddisfa 1) (con $n = 1$) ma non è di Hausdorff.

Definizione: Un atlante $\mathcal{A}$ di una varietà topologica X si dice <u>di classe C^∞</u> se per ogni coppia (U_1, W_1, φ_1), (U_2, W_2, φ_2) di carte locali di $\mathcal{A}$, se $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ allora



l'applicazione $\varphi_2^{-1} \circ \left(\varphi_1 \Big|_{\varphi_1^{-1}(W_1 \cap W_2)} \right) : \varphi_1^{-1}(W_1 \cap W_2) \longrightarrow \varphi_2^{-1}(W_1 \cap W_2)$

è C^∞.

Definizione: Due atlanti $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di classe C^∞ di una varietà topologica X si dicono <u>compatibili</u> se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è un atlante C^∞.

Oss.: 1) Quindi due atlanti C^∞ sono compatibili se la „compatibilità C^∞" della definizione è soddisfatta anche per ogni φ_1 di $\mathcal{A}$ e φ_2 di $\mathcal{B}$.

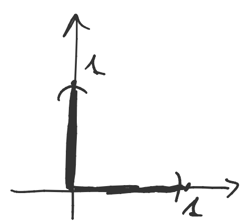
2) Si verifica facilmente che la compatibilità di atlanti è una relaz. d'equivalenza.

d'equivalenza.

<u>Definizione</u>: Una <u>varietà differenziabile di dim. n</u> è una varietà topologica assieme alla scelta di una classe d'equivalenza di atlanti.

<u>Esempio</u>: 1) Se X è una varietà topologica che ammette un atlante che ha <u>solo una</u> carta locale, allora è una varietà differenziabile (preso con la classe d'eq. di quell'atlante).

Attenzione: allora ad es. $X = [0,1[\times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1[$



è omeomorfo a $]0,1[$, cioè posso vederlo come una varietà topologica con una sola carta locale. Quindi è una varietà differenziabile.

(Non sembra essere compatibile con la parola "differenziabile", ma il problema è solo che lo vedo come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, mentre nella definiz. di varietà differenziabile non c'è uno "spazio ambiente".)

<u>Esempio</u>: E' facile dare esempi di atlanti non compatibili. Sia ad es. $X = \mathbb{R}$, sia $\mathcal{A}$ atlante formato da $\Big(\underset{U_1}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}, \underset{W_1}{\underset{\shortparallel}{X}}, \underset{\varphi_1}{\underset{\shortparallel}{Id}}\Big)$.

Sia $\mathcal{B}$ formato da $\Big(\underset{U_2}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}, \underset{W_2}{\underset{\shortparallel}{X}}, \underset{\varphi_2}{\underset{\shortparallel}{f}}\Big)$ dove $f(x) = x^3$.

$U_2 \quad W_2 \quad \varphi_2$

Allora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ non sono compatibili, perché

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \underbrace{f^{-1}}_{\substack{\shortparallel \\ x \mapsto \sqrt[3]{x}}} \circ \, Id_{\mathbb{R}} = (x \mapsto \sqrt[3]{x})$$

non è C^∞.

Quindi formalmente X con atlante $\mathcal{A}$ e X con atlante $\mathcal{B}$ sono due varietà differenziabili <u>diverse</u> (però esiste una bijezione C^∞ con inversa C^∞ fra le due, quindi non è sbagliato pensarle come „la stessa" varietà differenziabile).

<u>Varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^n$</u>

Definizione: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. X è detto <u>varietà differenziabile immersa di dimensione m</u> se $\forall p \in X$ $\exists W \subseteq X$ aperto e $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e $\varphi : U \to W$ tale che

1) φ è un omeomorfismo
2) φ è differenziabile $(= C^\infty)$.
3) $\forall$ ( ) ... d ... è iniettivo

3) $\forall q \in U$: $d\varphi_q$ è iniettivo.

<u>Oss.</u>: Ricordiamo: $d\varphi_q : \underset{\left(T_q\mathbb{R}^m\right)}{\overset{\|}{\mathbb{R}^m}} \longrightarrow \underset{\left(T_{\varphi(q)}\mathbb{R}^n\right)}{\overset{\|}{\mathbb{R}^n}}$ è l'applicazione lineare

$v \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$. Rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$,

la matrice di $d\varphi_q$ è la matrice Jacobiana $J\varphi_q$.

Richiedere che $d\varphi_q$ sia un'applicazione lineare iniettiva equivale a richiedere che $m \leq n$ e che $rg(J\varphi_q) = m$ (cioè che $J\varphi_q$ abbia rango massimo).

Anche qui le terne (U, W, φ) (o anche semplicem. le applicazioni φ) si dicono <u>carte locali</u> (talvolta chiamate <u>mappe</u>, o <u>coordinatizzazioni</u>).

<u>Oss.</u>: Ogni varietà differenziabile immersa è naturalmente una varietà differenziabile, scegliendo carte locali dall'ultima def. fino a formare un atlante. Verificheremo più avanti che si tratta di un atlante C^∞.

<u>Esempio</u>: 1) $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ è una varietà differenziabile immersa, con

Esempio: 1) $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ è una varietà differenziabile immersa, con carte locali

$$\tilde{\varphi}_1 : \underbrace{]0, 2\pi[}_{= U_1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$$

$$W_1 = \tilde{\varphi}_1(U_1)$$

$$W_2 = \tilde{\varphi}_2(U_2)$$

$$\tilde{\varphi}_2 : \underbrace{]-\pi, \pi[}_{= U_2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$$

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow W_1$$

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow W_2$$

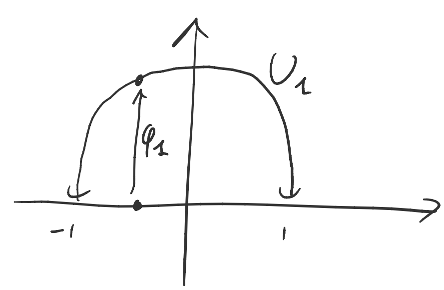
La matrice Jacobiana di φ_1 è $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ e ha sempre rango 1 $\forall t$.

Possiamo prendere anche altre carte locali, ad es.

$U_1 = \{(a,b) \in S^1 \mid b > 0\}$ $\quad U_2 = \{(a,b) \mid b < 0\}$

$U_3 = \{(a,b) \in S^1 \mid a > 0\}$ $\quad U_4 = \{(a,b) \mid a < 0\}$

$$\varphi_1 :]-1, 1[\longrightarrow U_1$$
$$t \longmapsto (t, \sqrt{1-t^2})$$



e le altre def. in modo simile

2) Come nella 2ª parte di 1) possiamo prendere

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ è aperto e f è C^∞

$f: U \to \mathbb{R}$ dove $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ è aperto, e f è C^∞.

Allora il suo grafico è una varietà differenziabile immersa di dim. $n-1$, con carta locale

$$\varphi: U \to W = \varphi(U)$$
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

allora φ è biiettiva, è continua, φ^{-1} è continua (perché è la proiezione sulle prime $n-1$ coordinate, ristretta a W), φ è C^∞, e la matrice Jacobiana di φ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

che ha rango $n-1$.

Questo tipo di carte locali è detto di <u>Monge</u>.

<u>Esercizio</u>: Trovare carte locali per $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Esempio</u>: Ci si può chiedere se <u>φ^{-1} continua</u> è conseguenza delle altre condizioni, sembrerebbe che per il teorema della funzione inversa in analisi si potrebbe avere φ^{-1} di classe C^∞.

in analisi si potrebbe avere φ' di classe C^∞.

Invece φ' continua è indipendente dalle altre:

$$\varphi: \,]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) (\subseteq \mathbb{R}^2)$$
$$t \longmapsto (\sin(t), \sin(2t))$$

φ è biiettiva, C^∞, con differenziale iniettivo, ma non è un omeomorfismo

$\mathrm{Im}(\varphi) = X$