Geometria 2, Lezione 28

Tuesday, 25 May 2021 12:06

Definizione: Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ a velocità unitaria, con $\alpha''(t) \neq 0 \ \forall t$, definiamo $b(t) = \alpha'(t) \wedge n(t)$.

($\wedge$: prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$)

Poniamo anche $T, N, B : I \to \mathbb{R}^3$ i campi vettoriali rispettivam. $t \mapsto \alpha'(t)$, $t \mapsto n(t)$, $t \mapsto b(t)$.

Oss.: La terna (T, N, B) è un campo di basi ortonormali orientate positivamente.

C'è una relazione fra B' e N simile a quella fra T' e N, per calcolarla deriviamo $B \cdot T = 0$, ottenendo $B' \cdot T + B \cdot T' = 0$.

Ma T' è proporzionale ad N, per cui $B \cdot T' = 0$, e allora $B' \cdot T = 0$.

Inoltre derivando $B \cdot B = 1$ otteniamo $2 B' \cdot B = 0$.

Segue: $b'(t)$ è ortogonale sia ad $\alpha'(t)$ sia a $b(t)$, quindi è un multiplo scalare di $n(t)$.

Definizione: Sia $\tau(t) \in \mathbb{R}$ tale che $b'(t) = -\tau(t) n(t)$.

È detta la <u>torsione</u> di α in t.

<u>Esempio:</u> $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\qquad r > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}$

$$t \mapsto \left(r\cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+\mu^2}}\right), r\sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2+\mu^2}}\right), \frac{\mu t}{\sqrt{r^2+\mu^2}} \right)$$

Questa è un'elica percorsa a velocità unitaria. Poniamo $\ell = \sqrt{r^2+\mu^2}$

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{r}{\ell}\sin\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{r}{\ell}\cos\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{\mu}{\ell} \right)$$

$$\alpha''(t) = \left(-\frac{r}{\ell^2}\cos\left(\frac{t}{\ell}\right), -\frac{r}{\ell^2}\sin\left(\frac{t}{\ell}\right), 0 \right) \qquad (\alpha''(t) \neq 0 \ \forall t)$$

$$k(t) = \|\alpha''(t)\| = \frac{r}{\ell^2}$$

$$n(t) = \frac{\alpha''(t)}{k(t)} = \left(-\cos\left(\frac{t}{\ell}\right), -\sin\left(\frac{t}{\ell}\right), 0 \right)$$

$$b(t) = \left(\frac{\mu}{\ell}\sin\left(\frac{t}{\ell}\right), -\frac{\mu}{\ell}\cos\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{r}{\ell} \right)$$

$$b'(t) = \left(\frac{\mu}{\ell^2}\cos\left(\frac{t}{\ell}\right), \frac{\mu}{\ell^2}\sin\left(\frac{t}{\ell}\right), 0 \right) = -\tau(t)\, n(t)$$

$$\tau(t) = \frac{\mu}{\ell^2}.$$

Il dato di T, N, B, k, τ si chiama <u>apparato di Frenet</u> di

[illegible]

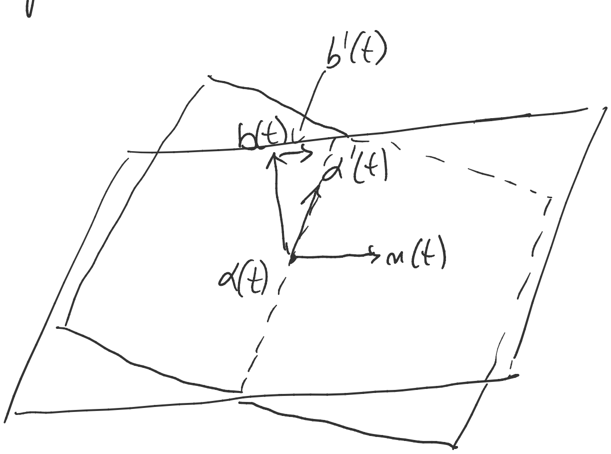
α. Consideriamo il piano affine $\alpha(t) + \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha'(t), n(t)\}$.

sottosp. vettoriale generato da $\alpha'(t)$ e $n(t)$

Questo piano è detto <u>piano osculatore affine</u> di α in t, ed è il piano affine contenente $\alpha(t)$ e più vicino a contenere α in un intorno di t. Infatti sviluppando α in un intorno di 0 abb.:

$$\alpha(t) = \underbrace{\alpha(0) + \alpha'(0)t + n(0)k(0)\frac{t^2}{2}} + b(0)k(0)\frac{t^3}{2} + o(t^3).$$

Inoltre $b(t)$ è ortogonale al piano osculatore, e visto che $b'(t)$ è proporzionale a $n(t)$, allora $n(t)$ è „l'unica direzione in cui si può spostare il piano" al variare di t:



<u>Proposizione</u> (Formule di Frenet in $\mathbb{R}^3$): Data $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ curva a velocità unitaria con $\alpha''(t) \neq 0$ $\forall t$. Allora:

1) $T' = k \cdot N$
2) $N' = -kT + \tau B$
3) $B' = -\tau \cdot N$

<u>Dim.</u>: C'è da dimostrare solo 2): esercizio (Suggerimento: derivare $N \cdot T = 0$, $N \cdot N = 1$, $N \cdot B = 0$)

$\square$

<u>Esercizio</u>: 1) (α come sopra) Dimostrare che $\alpha(I)$ è contenuta in un piano affine se e solo se $\tau(t) = 0$ $\forall t \in I$.

(Suggerimento: se $\alpha(I)$ è contenuta in un piano affine, allora fissando $t_0 \in I$ abb. $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ è ortogonale al vettore normale al piano).

2) $\alpha(I)$ è contenuta in una circonferenza (in $\mathbb{R}^3$) se e solo se $k(t)$ costante e $\tau(t) = 0$ $\forall t \in I$.

(suggerimento: se $k(t)$ costante e $\tau(t)=0$ indovinare qual è il centro della circonferenza in termini di $\alpha(t), \alpha'(t)$, ecc...).

Curve congruenti

Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'isometria. Cioè esiste $A \in O(3,\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\Phi(v) = Av + c \qquad (v, c = \text{vettori colonna})$$

Definizione: Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva, $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria, e $\beta = \Phi \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Allora β è una curva, e α e β si dicono congruenti. Se inoltre Φ è una traslazione, allora α e β si dicono parallele.

Oss.: Sia $A \in O(3,\mathbb{R})$ e $v, w \in \mathbb{R}^3$ allora

$$A(v \wedge w) = \operatorname{sign}(\det(A))\big((Av) \wedge (Aw)\big)$$

Proposizione: Siano α, β, Φ come nella definizione, e $\Phi(v) = Av + c$

Proposizione: Siano α, β, Ψ come nella definizione, e $\Psi(v) = Av + c$ come prima. Allora:

1) α è a velocità unitaria $\iff$ β è a velocità unitaria.

2) $\alpha''(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \iff \beta''(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

3) Supponiamo α a velocità unitaria e $\alpha''(t) \neq 0 \; \forall t$, allora:

$$\beta'(t) = A\alpha'(t),$$
$$n_\beta(t) = A\, n_\alpha(t),$$
$$b_\beta(t) = \operatorname{sign}(\det(A))\, A\, b_\alpha(t),$$
$$k_\beta(t) = k_\alpha(t),$$
$$\tau_\beta(t) = \operatorname{sign}(\det(A))\, \tau_\alpha(t).$$

Dim.: Esercizio.

Teorema: Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curve a velocità unitaria tali che $\alpha''(t) \neq 0 \neq \beta''(t) \; \forall t \in I$. Le curve α, β sono congruenti se e solo se $k_\alpha = k_\beta$ e $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta$ (come funzioni $I \to \mathbb{R}$).

Per la dimostrazione:

<u>Lemma:</u> Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curve. Se $\alpha'(t) = \beta'(t)$ $\forall t \in I$ allora α e β sono parallele, e se inoltre $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ per un $t_0 \in I$, allora $\alpha = \beta$.

<u>Dim.:</u> Basta porre $F(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, allora $F'(t) = 0$, quindi F è costante e allora α e β sono parallele. Se $F(t_0) = 0$ allora $F \equiv 0$, e $\alpha = \beta$. $\square$

<u>Dim. del teorema</u>: $\Rightarrow$) Segue dalla proposizione.

$\Leftarrow$) Sia $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tale che $k_\alpha = k_\beta$ e $\tau_\alpha = \varepsilon \tau_\beta$.

Fissiamo $t_0 \in I$, e consid. i riferimenti affini:

$$\mathcal{R} = \left(\alpha(t_0);\ \alpha'(t_0),\ n_\alpha(t_0),\ b_\alpha(t_0) \right),$$

$$\mathcal{R}' = \left(\beta(t_0);\ \beta'(t_0),\ n_\beta(t_0),\ \varepsilon\, b_\beta(t_0) \right),$$

e sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'isometria che manda $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$, cioè $\Phi(v) = Av + c$ dove $A \in O(3, \mathbb{R})$ è tale che cioè $\Phi(v)=Av+c$ dove $A\in O(3,\mathbb{R})$ è tale che

$$A\alpha'(t_0)=\beta'(t_0),\quad An_\alpha(t_0)=n_\beta(t_0),\quad Ab_\alpha(t_0)=\varepsilon b_\beta(t_0),$$

$$c=\beta(t_0)-A\alpha(t_0)\quad \left(\text{così } \Phi(\alpha(t_0))=\beta(t_0)\right).$$

Poniamo $\gamma=\Phi\circ\alpha$, e dimostriamo che $\gamma=\beta$. Usiamo il lemma, facendo vedere che $\gamma(t_0)=\beta(t_0)$ (ovvio per costruzione) e che $\gamma'(t)=\beta'(t)$ $\forall t$.

Sfruttiamo il fatto che se $\|v\|=1=\|w\|$, allora $v=w$ se e solo se $v\cdot w=1$. Lo usiamo per confrontare contemporaneamente γ' e β', n_γ e n_β, b_γ e b_β.

Poniamo allora:

$$F(t)=\gamma'(t)\cdot\beta'(t)+n_\gamma(t)\cdot n_\beta(t)+b_\gamma(t)\cdot b_\beta(t).$$

Osserviamo che $F(t)=3$ se e solo se $\gamma'(t)=\beta'(t)$, $n_\gamma(t)=n_\beta(t)$, $b_\gamma(t)=b_\beta(t)$. Inoltre $F(t_0)=3$ per costruzione, e calcolando $F'(t)$ si ottiene $F'(t)=0$ $\forall t$ (i 6 termini si cancellano grazie alle formule di Frenet). Concludiamo $\gamma'(t)=\beta'(t)$ e allora α e β sono congruenti. $\square$

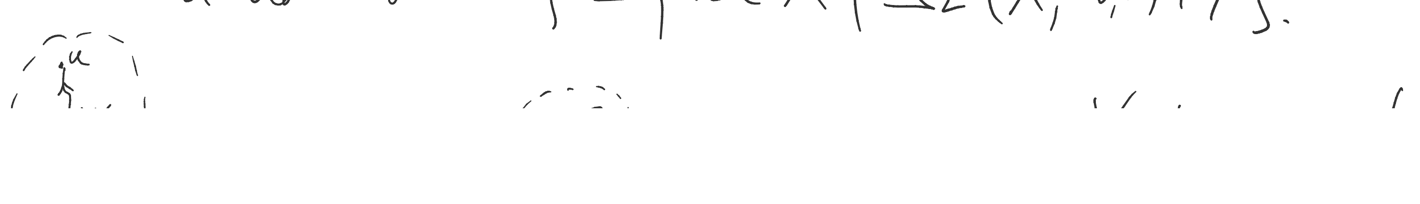
Curve a velocità qualsiasi

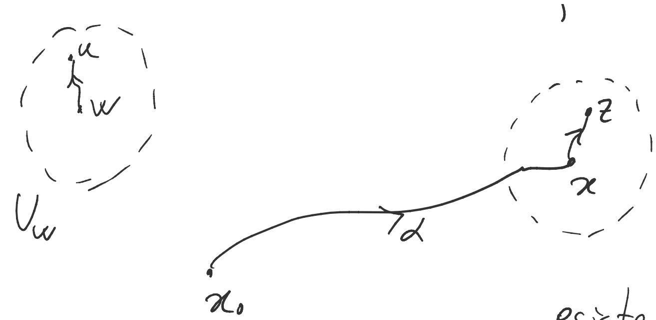
Data $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ curva regolare, non necessariamente a velocità unitaria.
Si possono dare definizioni e risultati analoghi a quelli visti usando una riparametrizzazione α_0 a velocità unitaria di α, se $\alpha_0''(t) \neq 0 \ \forall t$.
Si definiscono in questo modo T, N, B, k, τ di α (per def., sono quelli di α_0). A questi dati si aggiunge anche $v(t) = \|\alpha'(t)\|$.
L'analogo del teorema precedente è in questo caso: α e β sono congruenti se e solo se $k_\alpha = k_\beta$, $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta$, $\boxed{v_\alpha = v_\beta}$.

Esempi ed esercizi

<u>Esercizio:</u> Sia X spazio topologico localmente connesso per archi. Se X è anche connesso, allora è connesso per archi.

<u>Svolgimento:</u> Se X è vuoto allora è connesso per archi, supponiamo $X \neq \emptyset$ e sia $x_0 \in X$. Sia $Y = \{x \in X \mid$ esiste un cammino α da x_0 a $x\} = \{x \in X \mid \Omega(X, x_0, x) \neq \emptyset\}$.





ogni $x \in Y$ ha un intorno U_x connesso per archi, e per ogni $z \in U_x$ esiste un cammino da x_0 a z.

Cioè $U_x \subseteq Y$, e allora Y è aperto.

Sia ora $w \in X \setminus Y$, e sia U_w un intorno di w connesso per archi. Allora $\forall u \in U_w$ abb. $\Omega(X, x_0, u) = \phi$, perché se ho un cammino da x_0 a u ce n'è uno anche da x_0 a w.

Segue: $U_w \subseteq X \setminus Y$ e allora $X \setminus Y$ è aperto, cioè Y è chiuso. Visto che X è connesso, allora $Y = X$. Segue: X è connesso per archi. $\square$

<u>Oss.</u>: Grazie all'esercizio, se consideriamo <u>solo</u> spazi topologici localm. connessi per archi, allora connessione = connessione per archi.

<u>Esercizio</u>: 1) Consideriamo $X = S^1$ e $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\pi_1(X)$ esiste un rivestimento connesso $E \xrightarrow{p} X$ tale che $p_*(\pi_1(E)) = H$.

un rivestimento connesso $E \to X$ tale che $p_*(\pi_1(E)) = H$.

2) Dimostrare che i rivestimenti ottenuti nella parte 1) sono <u>tutti</u> i rivestimenti connessi di X (a meno di omeomorfismi; cioè sto considerando <u>uguali</u> due rivestimenti $p_1 : E_1 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ se esiste un omeomorfismo $\varphi : E_1 \to E_2$ tale che

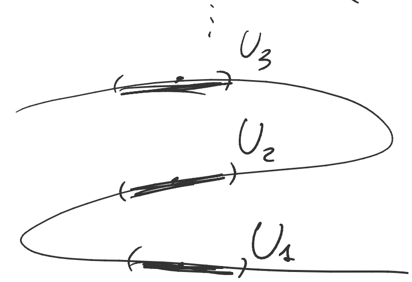
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $p_1 = p_2 \circ \varphi$.)

<u>Esercizio</u>: $p : E \to X$ rivestimento, e supponiamo E compatto, X di Hausdorff. Dimostrare che p ha grado finito.

<u>Svolgimento</u>: Sia $x \in X$, V aperto banalizzante contenente x, allora $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$

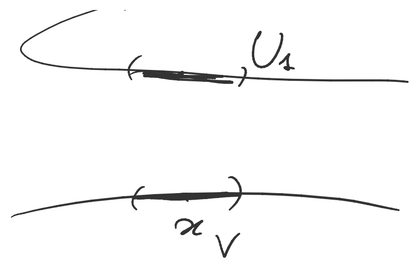
dove U_i è aperto in E e $p|_{U_i} : U_i \to V$ è omeom. $(\forall i)$.



D'altronde $\{x\}$ è chiuso in X, quindi $X \setminus \{x\}$ è aperto.

quindi $X \setminus \{x\}$ è aperto.

Allora



$p^{-1}(X \setminus \{x\})$, e U_i $\forall i \in I$ formano un ricoprimento aperto di E. Per compattezza esistono $i_1, \dots, i_d$ tali che

$$E = p^{-1}(X \setminus \{x\}) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_d} .$$

Inoltre ogni elem. di $p^{-1}(x)$ è in uno solo di questi aperti, quindi $p^{-1}(x)$ è un insieme finito. Cioè il rivestim. ha grado finito.

<u>Esercizio per casa:</u> Dimostrare la stessa cosa senza supporre X di Hausdorff.

<u>Esercizio per casa:</u> Sia $X = A \cup B$ spazio topologico con A, B aperti. Supponiamo X connesso per archi e $A \cap B$ connesso per archi. Dimostrare che A e B sono entrambi connessi per archi.

<u>Esercizio:</u> Sia X spazio topologico, e siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ aperti semplicemente connessi con $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

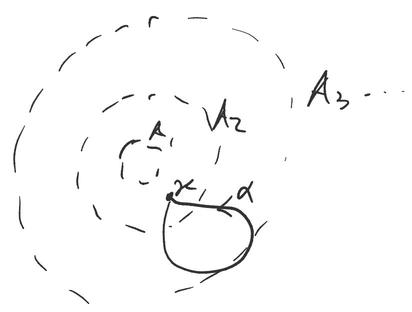
aperti ... $X = \bigcup_{i=1} \dots$

Dimostrare che X è semplicemente connesso.

Variante: si possono prendere gli A_i non necessariamente aperti, ma supponendo $A_i \subseteq \mathring{A}_{i+1}$.

<u>Svolgimento:</u> Siano A_i aperti $\forall i$. X è connesso per archi (già visto)

Sia $x \in X$ e $\alpha \in \Omega(X, x, x)$. Visto che $\alpha([0,1])$ è compatto, esiste i tale che $A_i \supseteq \alpha([0,1])$.



Cioè $\alpha \in \Omega(A_i, x, x)$, e allora $\alpha \sim 1_x$ perché A_i è semplicem. connesso.

La variante si tratta allo stesso modo usando il ricoprim. aperto $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{A}_i$.