Geometria 2, Lezione 27

Monday, 24 May 2021 06:47

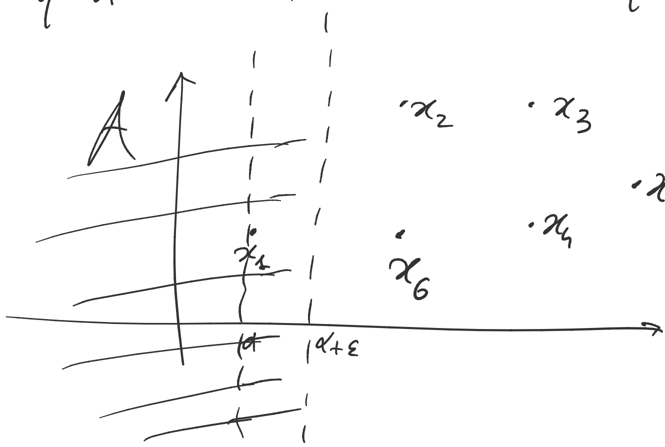
Esempi ed esercizi

Esercizio (già assegnato per casa): Consid. $X = \mathbb{R}^n \setminus \{m \text{ punti}\}$ con $n \geq 3$, $m \geq 0$.

Dim. che X è semplicem. connesso.

Svolgimento: Per induzione su m, per $m=0$ abb. $X = \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ contraibile $\Rightarrow$ sempl. connesso.

Passo induttivo: supponiamo in aggiunta che rispetto a una delle coordinate (ad es. la prima) ci sia uno degli m punti per cui questa coordinata è $<$ di quella degli altri punti;



ad es. sia α la prima coordinata di x_1, tale che la prima coord. di $x_2, \dots, x_m$ è $> \alpha$ $\left(X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_m\}\right)$.

Consid. $A = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{la } 1^a \text{ coord. è } < \alpha + \varepsilon\}$ dove $\varepsilon > 0$ è tale che la prima coord. di $x_2, \dots, x_m$ è $> \alpha + \varepsilon$

$B = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \text{la } 1^a \text{ coord. è } > \alpha\}$

Allora $A \ni x_1$, $A \not\ni x_2, \dots, x_m$ e $B \not\ni x_1$, $B \ni x_2, \dots, x_m$.

Dato che $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ... allora $A' = X \cap A$, $B' = X \cap B$ ...

Allora $A \ni x_1$, $A \not\ni x_2, \dots, x_m$ e $B \not\ni x_1$, $B \ni x_2, \dots, x_m$.

D'altronde $A \cup B = \mathbb{R}^n$, allora $A' = X \cap A$, $B' = X \cap B$ soddisfano:

$$A' \cup B' = X, \quad A' \cap B' = A \cap B =]\alpha, \alpha + \varepsilon[\times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Inoltre $A' \cap B'$ è connesso per archi, A' è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{1 \text{ pto}\}$, B' è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{m-1 \text{ punti}\}$.

Abb. anche: A' ha come retratto per deformazione una sfera S^{n-1}, che è semplicem. connessa (visto che $n-1 \geq 2$).

Per ipotesi induttiva B' è semplicemente connesso, e il teorema di Seifert-Van Kampen implica che X è semplicem. connesso.

(Osserviamo che questo argomento funziona anche per $m=1$, in cui $B = B'$.)

Discutiamo il caso in cui non si trova uno dei punti di cui una coordinata è più piccola di quella di tutti gli altri. In quel caso basta cambiare coordinate per mettersi nell'ipotesi precedente (piccolo esercizio di algebra lineare).

CURVE E SUPERFICI

Curve in $\mathbb{R}^n$

(anche semplicem. curva)

Definizione: Una curva differenziabile parametrizzata (in $\mathbb{R}^n$)

Definizione: Una <u>curva differenziabile parametrizzata</u> (in $\mathbb{R}^n$) è un'applicazione differenziabile $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. (Qui <u>differenziabile</u> $= C^\infty$)

Esempi: 1) $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$t \mapsto p + qt$
(l'immagine di α è una retta affine)
qui $p, q \in \mathbb{R}^n$ fissati, $q \neq 0$.

2) $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$t \mapsto p + qt^3$
(è la stessa retta, percorsa con una diversa „velocità").

3) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$t \mapsto \left(r\cos(t), r\sin(t), \mu t\right)$ con $r > 0$ fissato, $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$ fissato

(l'immagine è un'elica)

Oss.: Potremmo usare, invece che $\mathbb{R}^n$, uno spazio euclideo qualsiasi E.
Ricordiamo che dato $P \in E$ è definita un'applicazione

$\varphi_P: E \to \mathbb{R}^n$
$Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$
dove $\overrightarrow{PQ}$ è il vettore „da P a Q".

Inoltre φ_P è biiettiva, e usando φ_P^{-1} si può dotare E di struttura di spazio vettoriale. Con questa struttura di sp. vettoriale (dove identifichiamo i punti Q di E con i vettori $\overrightarrow{PQ}$ di $\mathbb{R}^n$), E si dice anche <u>spazio tangente a E in P</u>, si denota con $T_P E$.

Per semplicità, nel corso considereremo solo $E = \mathbb{R}^n$.

<u>Definizione:</u> Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva, si dice <u>vettore velocità</u> di α in $t \in I$ il vettore

$$\alpha'(t) = \left(\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t)\right) \qquad \text{dove } \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)),$$

e $\|\alpha'(t)\|$ si dice <u>velocità</u> di α in t.

La curva α si dice <u>regolare</u> se $\|\alpha'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I$.

<u>Definizione:</u> Una <u>riparametrizzazione</u> di una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ è una curva $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ del tipo $\beta = \alpha \circ \vartheta$ dove $\vartheta : J \to I$ è una funzione C^∞ biiettiva tale che $\vartheta'(s) \neq 0 \quad \forall s \in J$.

Se $\vartheta'(s) > 0 \quad \forall s \in J$, allora β <u>ha lo stesso verso di</u>

Se $\vartheta'(s)>0$ $\forall s\in J$, allora β ha lo stesso verso di percorrenza di α, altrimenti $\vartheta'(s)<0$ $\forall s\in J$, e allora β ha verso opposto.

Oss.: 1) Gli esempi 1) e 2) non sono uno la riparametrizzazione dell'altro (seguendo la def.), perché $\beta=\alpha\circ\vartheta$ con ϑ C^∞, ma $\vartheta'(0)=0$.

2) Se β è una riparametrizzazione di α, allora α è una riparametrizzazione di β, visto che se $\beta=\alpha\circ\vartheta$ allora $\alpha=\beta\circ\vartheta^{-1}$ dove $\vartheta^{-1}:I\to J$ è C^∞, e $(\vartheta^{-1})'(t)\neq 0$ $\forall t$.

3) Il vettore velocità di β è $\beta'(s)=\alpha'(\vartheta(s))\,\vartheta'(s)$, e la velocità è $\|\beta'(s)\|=\|\alpha'(\vartheta(s))\|\cdot|\vartheta'(s)|$ e allora α regolare $\Leftrightarrow$ β regolare.

Definizione: Data $\alpha:I\to\mathbb{R}^n$ curva, e $t_0,t_1\in I$ con $t_0<t_1$, definiamo la lunghezza di α fra t_0 e t_1 come

$$\int_{t_0}^{t_1}\|\alpha'(t)\|dt.$$

Se invece $t_0 > t_1$, la lunghezza è

$$-\int_{t_1}^{t_0} \|\alpha'(t)\|\, dt \quad \left(= \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|\, dt \right).$$

Esempi: 1) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\qquad$ p, q fissati $\in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$.

$$t \longmapsto p + qt$$

Allora $\alpha'(t) = q \;\; \forall t$, la lunghezza di α fra t_0 e t_1 è

$$\int_{t_0}^{t_1} \|q\|\, dt = (t_1 - t_0)\|q\|.$$

2) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ (è la circonferenza di raggio

$t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ $\qquad$ $r > 0$, percorsa a velocità r)

$$\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2} = r$$

La lunghezza di α fra t_0 e t_1 è $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} r\, dt = r(t_1 - t_0)$.

Oss.: Se β è una riparametrizz. di α (con lo stesso verso), allora la lunghezza di β fra s_0 e s_1 è la stessa di α fra $\theta(s_0)$ e $\theta(s_1)$, infatti

$$\int^{s_1} \|\beta'(s)\|\, ds = \int^{s_1} \|\alpha'(\theta(s))\|\, |\theta'(s)|\, ds = \int^{\theta(s_1)} \|\alpha'(t)\|\, dt$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(s)\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \|\alpha'(\vartheta(s))\| \cdot \underbrace{|\vartheta(s)|}_{\vartheta(s)} ds = \int_{\vartheta(s_0)}^{\vartheta(s_1)} \|\alpha'(t)\| dt .$$

Proposizione: Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ curva regolare. Esiste una riparametrizz. β di α a velocità costante $=1$.

Dim.: Fissiamo $t_0 \in I$ e def. $\varphi: I \to \mathbb{R}$ come

$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt$. Allora φ è C^∞ e $\varphi'(t) = \|\alpha'(t)\|$, quindi $\varphi'(t) > 0$ $\forall t$ (perché α è regolare). Possiamo restringere il codominio e considerare φ come applicaz. $\varphi: I \to J$ dove $J = \varphi(I)$. J è un intervallo, e $\varphi^{-1} = \vartheta$ è C^∞ con $\vartheta'(s) \neq 0$ $\forall s \in J$: $\vartheta'(s) = \dfrac{1}{\varphi(\vartheta(s))}$ $\forall s$.

Allora
$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(\vartheta(s))\| \cdot |\vartheta'(s)| = \frac{\|\alpha'(\vartheta(s))\|}{\|\alpha'(\vartheta(s))\|} = 1 \ \forall s.$$

$\square$

Esempio: Se α ha velocità <u>costante</u> allora è facile dare direttam. β riparam. a velocità unitaria, ad es. data α di prima:

β riparam. a velocità unitaria, ad es. data α di prima:

$$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{avevamo } \|\alpha'(t)\| = r \quad \forall t,$$
$$t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t))$$

allora basta prendere

$$\beta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$s \longmapsto \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right),$$

$$\beta'(s) = \left(-\cancel{r}\sin\left(\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}}, \cancel{r}\cos\left(\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\right) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

e abb. $\|\beta'(s)\| = 1 \quad \forall s$.

Definizione: Un <u>campo di vettori</u> su una curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione differenziabile $v: I \to \mathbb{R}^n$ (la def. data così formalmente non dipende da α, in realtà penso il vettore $v(t)$ come applicato ad $\alpha(t)$, cioè $v(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$). Dati campi vettoriali v, w su α, è definita la loro somma
$$v+w: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto v(t)+w(t),$$
e il loro prodotto scalare
$$v \cdot w: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto v(t)\cdot w(t)$$
. Inoltre data

$f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile, è def. il campo di vettori $\begin{aligned} f\cdot v : I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(t)v(t) \end{aligned}$.

<u>Oss.</u>: Se v e w sono campi di vettori su α, allora

$$(v\cdot w)'(t) = v'(t)\cdot w(t) + v(t)\cdot w'(t)$$

(basta applicare la regola di Leibnitz componente per componente).

<u>Definizione</u>: Un <u>campo di basi</u> (eventualmente ortogonali, ortonormali, ecc...) su α è una n-upla di campi di vettori $v_1, \dots, v_n$ su α tali che $(v_1(t), \dots, v_n(t))$ è una base (ev. ortogonale, ortonormale, ecc....) $\forall t \in I$.

<u>Formule di Frenet in $\mathbb{R}^2$</u>

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ curva, supponiamo α a velocità unitaria.

Definiamo $\begin{aligned} T : I &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha'(t) \end{aligned}$. E' un campo di vettori (ciascuno a norma $=1$).

Per ogni t, sia $n(t) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\|n(t)\| = 1$ e $(\alpha'(t), n(t))$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ orientata positivamente.

Definiamo $N : I \to \mathbb{R}^2$

Definiamo $N : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
$$t \longmapsto n(t)$$

<u>Oss.</u>: N è un campo di vettori su α, cioè $t \mapsto n(t)$ è C^∞, perché per ottenere le comp. di $n(t)$ prendo quelle di α', le scambio, e cambio segno a una delle due.

Inoltre: $1 = \|\alpha'(t)\|^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t)$. Derivando otteniamo

$0 = 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) \quad \forall t$. Segue che $\alpha''(t)$ è un multiplo scalare di $n(t)$ $\forall t$ (lo scalare dipende da t).

<u>Def.</u>: Sia $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\alpha''(t) = k(t)\, n(t) \quad \forall t \in I$.
Il numero $k(t)$ si dice <u>curvatura</u> di α in t, e k si dice <u>funzione curvatura</u> di α.

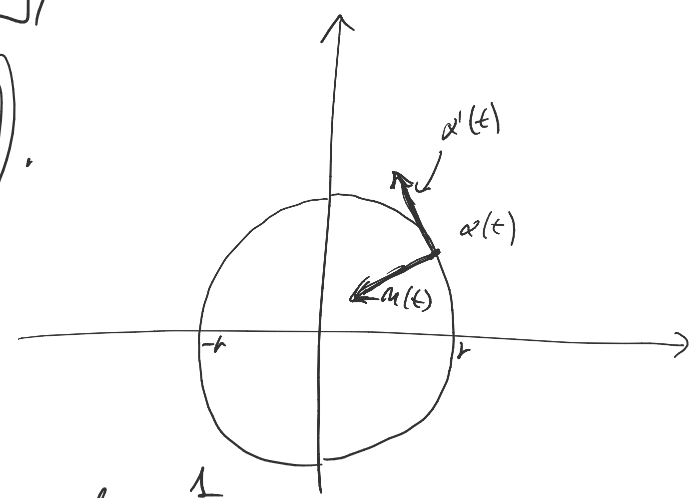
<u>Es.</u>: Calcoliamo $n(t)$ e $k(t)$ per $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \left(r\cos\left(\tfrac{t}{r}\right), r\sin\left(\tfrac{t}{r}\right)\right)$$
(la circonf. di raggio r param. a vel. unitaria).

Abb. $\beta'(t) = \left(-\sin\left(\frac{t}{r}\right), \cos\left(\frac{t}{r}\right)\right)$

$n(t)$ è tale che $\left\| \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{r}\right) & \boxed{n(t)} \end{pmatrix} \right\| = 1$ e $n(t) \perp \beta'(t)$

$n(t)$ è tale che $\det \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{r}\right) & \boxed{n(t)} \\ \cos\left(\frac{t}{r}\right) & \end{pmatrix} = 1$ e $n(t) \perp \beta'(t)$.

Allora $n(t) = \left(-\cos\left(\frac{t}{r}\right), -\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)$.



Inoltre

$$\beta''(t) = \left(-\cos\left(\frac{t}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}, -\sin\left(\frac{t}{r}\right)\frac{1}{r}\right)$$

quindi in questo caso $k(t)$ è <u>costante</u>, uguale a $\frac{1}{r}$.

<u>Proposizione</u> (Formule di Frenet in $\mathbb{R}^2$): Data $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ curva a vel. unitaria, valgono:

1) $T' = kN$

2) $N' = -kT$

<u>Dim.:</u> 1) è la definizione di k, dimostriamo 2).

Sappiamo che $T \cdot N = 0$, derivando otteniamo

$T' \cdot N + N' \cdot T = 0$, cioè $\boxed{N' \cdot T} = -T' \cdot N =$

$$= -k \underbrace{N \cdot N}_{=1} = \boxed{-k}$$

Inoltre derivando $N \cdot N = 1$ otteniamo

$=1$

Inoltre derivando $N \cdot N = 1$ otteniamo

$2N' \cdot N = 0$, cioè $N' \cdot N = 0$.

Segue che N' è multiplo scalare di T, e questo multiplo è proprio $-k$. $\square$

<u>Formule di Frenet in $\mathbb{R}^3$</u> (si possono generalizzare a $\mathbb{R}^n$, v. libro di Sernesi)

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ a velocità unitaria, e supponiamo

$\alpha''(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

<u>Definizione</u>: Definiamo $k(t) = \|\alpha''(t)\|$, chiamata <u>curvatura</u> di α in t, e poniamo $n(t) = \dfrac{\alpha''(t)}{k(t)}$, che è un vettore di norma 1.