Geometria 2, Lezione 26

Thursday, 20 May 2021 09:15

Esempi ed esercizi

Riprendiamo l'ultimo esercizio. La f definita nella soluzione potrebbe non essere continua in $x \in X$ non appartenente ad alcun $B(x_n, r_{x_n})$, perché potrebbe essere in $\partial B(x_n, r_{x_n})$ per infiniti n, cioè potrebbe essere $d(x, x_n) = r_{x_n}$ per infiniti n, e allora f non sarebbe continua in x.

Per aggiustare la def. di f basta imporre che $r_{x_n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Allora $\forall x \in X$ non appartenente a $B(x_n, r_{x_n})$ $\forall n$ $\exists\, \delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \cap B(x_n, r_{x_n}) = \emptyset$ tranne che per un numero finito di indici n (altrimenti per ogni δ troverei un x_n a distanza minore di $\delta + r_{x_n}$, e visto che $r_{x_n} \to 0$ troverei una sottosucc. che tende a x).

Esempio: Riprendiamo l'esempio di $E = \mathbb{R}^2$, $G \subseteq Omeo(E)$ generato da

$$b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (x, y+1)$$
$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x+1,\ 1-y)$$

Dimostriamo che G agisce in modo propriamente discontinuo.
Osserviamo che ogni el. di G è un'<u>isometria</u> (non nec. lineare) di $\mathbb{R}^2$ in se stesso, cioè conserva le distanze.

<u>Parentesi:</u> <u>Esercizio:</u> Dimostrare che il gruppo delle traslazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un sottogruppo normale del gruppo delle isometrie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Poi considerare il sottogruppo

$$\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ isometria},\ f \text{ lineare}\} = O(n,\mathbb{R}).$$

Dimostrare che

$$\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ isometria}\} = O(n,\mathbb{R}) \times \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ traslazione}\}$$

(<u>Suggerimento:</u> Considerare in $GL(n+1,\mathbb{R})$ i sottogruppi

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & * & & \vdots \\ & & & * \\ \hline \underbrace{0 & \cdots & 0}_{n} & \boxed{*} \end{array}\right), \quad L = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & * & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \boxed{*} \end{array}\right)$$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & \mathrm{Id} & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e dimostrare che U

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

è normale in P, e che $P = L \ltimes U$.)

Torniamo all'esempio. Osserviamo che

$$a = (\text{traslazione}) \circ a_0$$
$$b = (\text{traslazione}) \circ b_0$$

dove $b_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$, $\quad a_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,-y)$ e sono entrambe

lineari. Per assurdo, supponiamo che esista (x_0, y_0) tale che per ogni intorno U di (x_0,y_0) esiste $g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset$, $g \neq Id_{\mathbb{R}^2}$.

Immaginiamo di fissare U "piccolo", ad es $U = B\left((x_0,y_0), \frac{1}{2}\right)$ e cerchiamo di capire come può essere fatto il g corrispondente.

Sappiamo che g è composizione di a, b, a^{-1}, b^{-1}:

$$g = a^{k_1} \circ b^{k_2} \circ a^{k_3} \circ b^{k_4} \circ \dots \circ a^{k_{s-1}} b^{k_s} \qquad \text{con } k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$$

Allora $g(x_0, y_0) = (x_0 + k_1 + k_3 + \dots + k_{s-1}, \ ?\ )$.

Dall'ipotesi $g(U) \cap U \neq \emptyset$ segue che $d((x_0,y_0), g(x_0,y_0)) < 1$

D'altronde $g(U) \cap U \neq \emptyset$, quindi $d((x_0, y_0), g(x_0, y_0)) < 1$.

Deduciamo $k_1 + k_3 + \ldots + k_{s-1} = 0$. Inoltre g si scrive come $(\text{traslazione}) \circ (a_0^{k_1} \circ b_0^{k_2} \circ \ldots \circ a_0^{k_{s-1}} \circ b_0^{k_s})$ (è una parte dell'esercizio dato nella parentesi). Da $k_1 + \ldots + k_{s-1} = 0$ deduco che a_0 è applicato un numero pari di volte, o anche osserviamo:

$$a_0^{k_1} \circ b_0^{k_2} \circ \ldots \circ a_0^{k_{s-1}} \circ b_0^{k_s} = a_0^{k_1 + k_3 + \ldots + k_{s-1}} = Id_{\mathbb{R}^2}$$

Deduciamo che g è una traslazione. D'altronde ogni elem. di G manda $\mathbb{Z}^2$ in $\mathbb{Z}^2$, per cui g è la traslazione per un elem. di $\mathbb{Z}^2$. Questo è assurdo perché $g(U) \cap U \neq \emptyset$ e quindi la distanza $d((x_0, y_0), g(x_0, y_0))$ deve essere < 1. Quindi G agisce in modo propriam. discontinuo.

<u>Esercizio</u>: Sia $E = \mathbb{R}^2$, e $G \subseteq \text{Omeo}(E)$ generato da

$$a(x, y) = (x+1, 1-y),$$

$$b(x, y) = (1-x, y+1)$$

Dim. che E/G è omeomorfo a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, ma G

Dim. che E/G è omeomorfo a $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, ma G non agisce in modo propriamente discontinuo (suggerim.: ci sono punti $p \in E$ ed elem. $g \in G$ tali che $g(p)=p$ ma $g \neq Id_{\mathbb{R}^2}$).

Si può anche dimostrare che $E \to E/G$ non è un rivestimento.

<u>Esempio</u> (a grandi linee, i dettagli sono sul libro di Manetti)

Il gruppo $SO(3,\mathbb{R})$ è compatto, connesso, e vale

$$\pi_1\left(SO(3,\mathbb{R})\right) \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

L'elemento non banale di $\pi_1\left(SO(3,\mathbb{R})\right)$ è dato fissando una retta in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine, un „verso di rotazione", e ponendo $\alpha(t)=$ rotazione di asse quella retta e angolo $2\pi t$.

<u>Esempio</u>: Nastro di Möbius: $M = \dfrac{[0,1]\times[0,1]}{\sim}$

$\sim$ ← identifica i lati verticali percorsi in senso opposto.

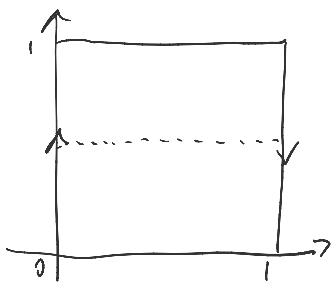
Def. un rivestimento di M dato da

$E = \mathbb{R} \times [0,1]$ e $G \subseteq Omeo(E)$ generato

da $a(x,y) = (x+1, 1-y)$. Abb. G agisce in modo da $a(x,y) = (x+1, 1-y)$. ... è già

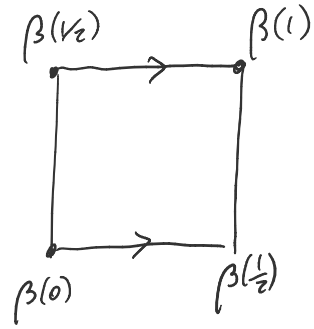
propriam. discontinuo, e E/G è omeomorfo ad M.

Questo mostra che $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, possiamo anche vedere questa cosa come conseguenza di: l'immagine di $[0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$ in M è omeom. a S^1 ed è retratto per deformazione di M.



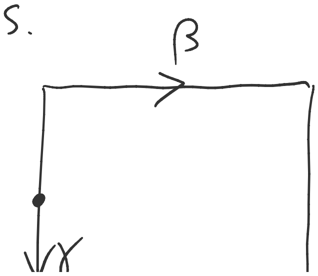
Il „bordo" di M è fatto da una copia di S^1, ottenuta come immagine di $\beta : [0,1] \longrightarrow M$ con

$$\beta(t) = \begin{cases} [(2t,0)] & \text{per } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ [(2t-1,1)] & \text{per } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

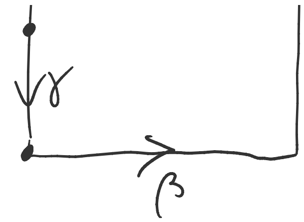


Prendiamo come punto base $[(0,\frac{1}{2})] \in M$, e calcoliamo a cosa corrisponde β nell'isomorfismo usuale, cioè prendiamo γ cammino da $[(0,\frac{1}{2})]$ a $[(0,0)]$ e vediamo β come corrispondente al cammino $\gamma * \beta * i(\gamma)$. Ad es.

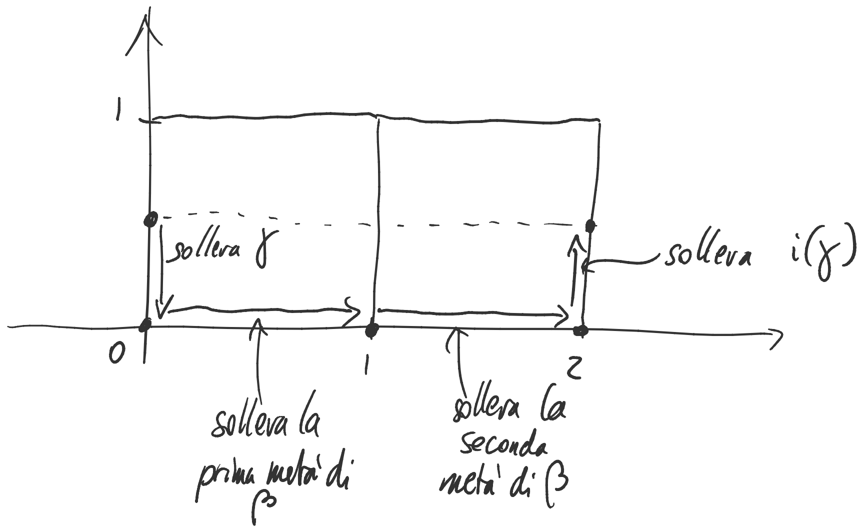
$$\gamma(t) = \left[\left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\right]$$



$\gamma(t) = [(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t)]$



Vediamo il sollevamento di $\gamma * \beta * i(\gamma)$ che parte da $(0, \frac{1}{2})$:



Allora $\underbrace{(0, \tfrac{1}{2}) \bullet [\gamma * \beta * i(\gamma)]}_{\text{punto finale del sollevato di } \gamma * \beta * i(\gamma) \text{ che parte da } (0, \frac{1}{2}) \in E} = (2, \tfrac{1}{2})$.

Grazie agli ultimi teoremi fatti, possiamo capire a che elem. di $\pi_1(M)$ corrisponde $[\gamma * \beta * i(\gamma)]$ vedendo quale elem. di G (cioè quale potenza di a) manda $(0, \frac{1}{2})$ in $(2, \frac{1}{2})$.

L'elemento è $a^2 = a \circ a$. Ma $G \cong \mathbb{Z}$ tramite $a^n \mapsto n$, quindi $[\gamma * \beta * i(\gamma)]$ corrisp. all'elem. $2 \in \mathbb{Z}$.

$a^n \longmapsto n$, quindi $[\gamma * \beta * i(\gamma)]$ corrisp. all'elem. $2 \in \mathbb{Z}$.

Con questo possiamo dimostrare che il bordo B di M <u>non</u> è un retratto di M. Per assurdo, sia B (omeom. a S^1) retratto di M, cioè $r: M \to B$ $\quad \iota: B \to M$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(M) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(B) \\ \cong & & \cong & & \cong \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n & & \end{array}$$

La composizione $\iota_* \circ r_*$ è l'identità perché $\iota \circ r = Id_B$, ma questo è assurdo.

Quindi B non è retratto di M.