Geometria 2, Lezione 25

Tuesday, 18 May 2021 12:05

Monodromia e azioni propriamente discontinue

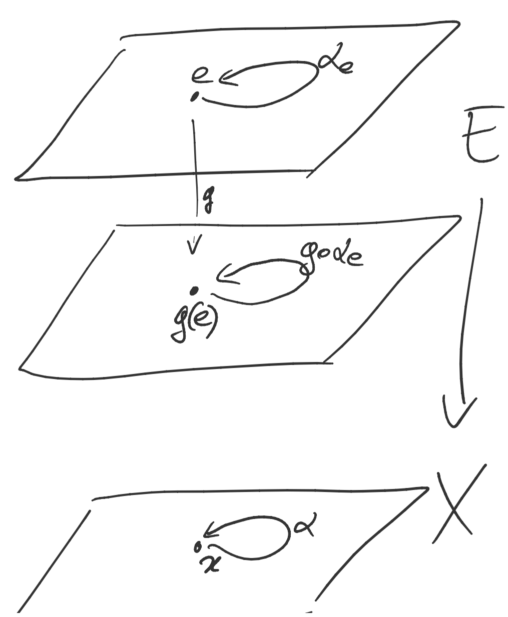
Sia E spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. Sia $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ sottogruppo che agisce in modo propr. discontinuo. Allora $E/G = X$ è connesso per archi, e $p: E \to E/G$ è un rivestimento. Segue anche che anche X è localmente connesso per archi.

Scegliamo $x \in X$ e un punto $e \in p^{-1}(x)$.

__Lemma:__ L'azione (sinistra) di G su $p^{-1}(x)$ è compatibile con l'azione (destra) di $\pi_1(X, x)$ su $p^{-1}(x)$, nel senso che per ogni $g \in G$ e per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ abb.

$$g(e) \cdot [\alpha] = g(e \cdot [\alpha])$$

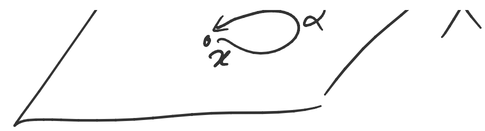
__Dim.:__ Abb. $e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$ per def.,



e $g(e \cdot [\alpha]) = g(\alpha_e(1))$,

che è anche uguale a $(g \circ \alpha_e)(1)$,

e $g \circ \alpha_e$ è un cammino in E che e $g \circ \tilde{\alpha}_e$ è un cammino in E che solleva α partendo da $g(e)$.



Allora il punto finale di questo cammino è proprio $g(e) \cdot [\alpha]$.

Il lemma segue. $\square$

<u>Teorema:</u> Sia $p : E \to E/G$ come sopra.

Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \theta_e : \pi_1(X, x) &\longrightarrow G \\ [\alpha] &\longmapsto g \end{aligned}$$

con $g \in G$ l'elemento tale che $g(e) = e \cdot [\alpha]$

Allora θ_e è ben definita ed è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Inoltre il nucleo di θ_e è $p_*(\pi_1(E,e))$, cioè $G \cong \dfrac{\pi_1(X,x)}{p_*(\pi_1(E,e))}$ (in particolare, $p_*(\pi_1(E,e))$ è un sgr normale di $\pi_1(X,x)$).

<u>Dim:</u> L'applicaz. θ_e è ben definita, perché se $g, h \in G$ tali che $g(e) = h(e)$ allora $h^{-1}(g(e)) = e$. Visto che l'az. è propriam. discontinua, $h^{-1} \circ g = Id_E$ cioè $g = h$.

discontinua, $n \circ g = Id_E$ cioè $g = n$.

Verifichiamo che ϑ_e è omomorfismo di gruppi: siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x)$.

Poniamo $\vartheta_e([\alpha]) = g$, $\vartheta_e([\beta]) = h$, cioè $g(e) = \alpha_e(1)$,

$h(e) = \beta_e(1)$.

Il prodotto $[\alpha]\cdot[\beta]$ è $[\alpha * \beta]$, quindi

$$\vartheta_e([\alpha]\cdot[\beta]) = \vartheta_e([\alpha * \beta]) = k$$

dove $k(e) = e \cdot [\alpha * \beta] = e \cdot ([\alpha]\cdot[\beta]) =$

$$(e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = g(e) \cdot [\beta] \underset{\uparrow \text{lemma}}{=} g(e \cdot [\beta]) = g(h(e)).$$

Con lo stesso argomento di prima deduciamo $k = g \circ h$, quindi ϑ_e è un omomorfismo.

Il nucleo di ϑ_e è $\{[\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid \vartheta_e([\alpha]) = Id_E\}$

ma $\vartheta_e([\alpha]) = Id_E$ se e solo se $e \cdot [\alpha] = e$, cioè il nucleo è $\{[\alpha] \mid e \cdot [\alpha] = e\}$. Per il teorema precedente, questo è proprio $p_*(\pi_1(E, e))$.

Verifichiamo che ϑ_e è suriettivo: sia $g \in G$, consid. $g(e) = e'$ e un cammino $\gamma \in \Omega(E, e, e')$. Allora γ solleva $p \circ \gamma$, e e un cammino $\gamma \in \Omega(E, e, e')$. Allora γ solleva $p \circ \gamma$, e abb. $[p\circ\gamma] \in \pi_1(X, x)$, e visto che $\gamma(1) = e'$ abb. $e \cdot [p\circ\gamma] = e'$.

Cioè $\vartheta_a([p\circ\gamma]) = g$. $\square$

<u>Corollario</u>: Se nel teorema abb. E semplicem. connesso, allora $G \cong \pi_1(X, x)$ tramite ϑ_e.

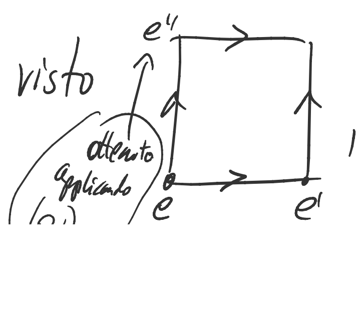
<u>Dim.</u> ovvia.

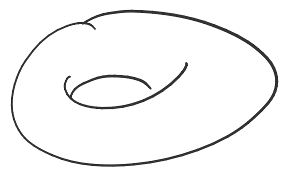
<u>Oss.</u>: Questo corollario viene usato per costruire, dato un gruppo G, uno spazio topologico X tale che $\pi_1(X, x) \cong G$.

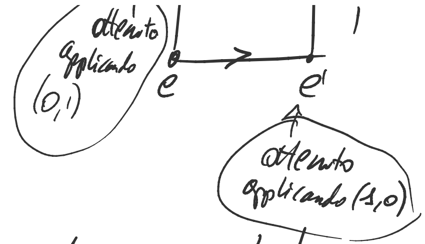
<u>Esempio</u>: Sia $G = \mathbb{Z}^2$. Consid. $E = \mathbb{R}^2$, allora possiamo vedere G come un gruppo di omeomorfismi $E \to E$ identificando $g = (n, m)$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ con la traslazione

$$E \longrightarrow E, \quad (a, b) \longmapsto (a+n, b+m).$$

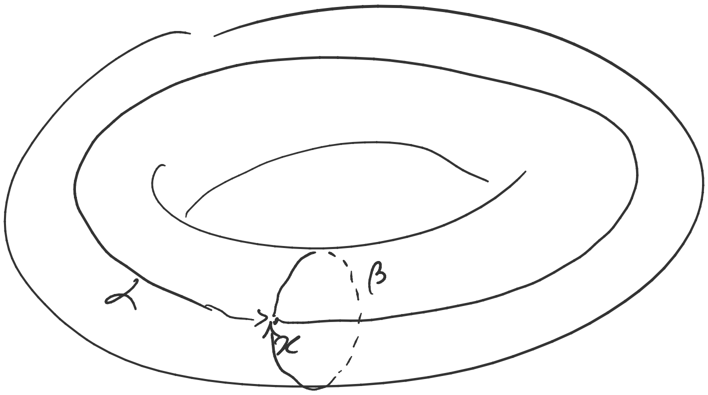
E' facile vedere che G allora agisce in modo propriam. discontinuo, e E/G è omeomorfo al quadrato $[0,1] \times [0,1]$ dove identifico i punti dei lati opposti nel modo già visto



ottenendo un toro 



Deduciamo che $\pi_1(\text{toro}) \cong \mathbb{Z}^2$. Possiamo disegnare sul toro dei generatori di π_1, ad es. quelli che corrisp. a $(1,0),(0,1)\in\mathbb{Z}^2$:



Sollevamenti di applicazioni qualsiasi

Siano Y sp. topologico, $p: E \to X$ rivestimento, $f: Y \to X$ continua. Ci chiediamo sotto quali condizioni si può sollevare f:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, g\, (?)"] & X \end{tikzcd}$$

Consid gli omomorfismi fra i gruppi fondamentali, scelto $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0) \in X$, ed $e_0 \in E$ tale che $p(e_0) = x_0$:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E, e_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "g_*\ (?)"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \\ \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, dashed] & \pi_1(X,x_0) \arrow[from=u, "p_*"] \end{tikzcd}$$

Se g esiste, allora $f_* = p_* \circ g_*$, e allora

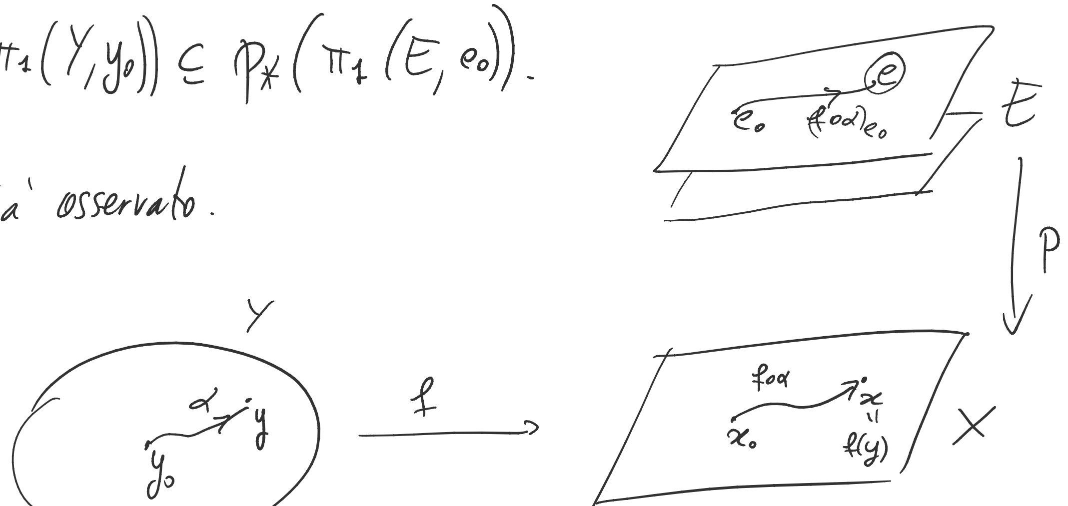
$$\boxed{f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0))}$$

(sono due sgr di $\pi_1(X,x_0)$).

<u>Teorema</u>: Siano E, Y, X connessi per archi e localmente connessi per archi, $p: E \to X$ rivestimento, e $f: Y \to X$ continua. Scelti $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, esiste $g: Y \to E$ solleram. di f tale che $g(y_0) = e_0$ <u>se e solo se</u> $f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,e_0))$.

<u>Dim.</u>: $\Rightarrow$) Già osservato.

$\Leftarrow$)

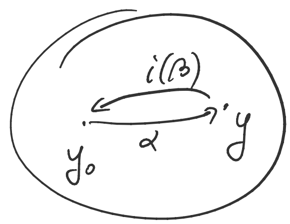


Dato $y \in Y$, <u>scegliamo</u> $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$, allora $f \circ \alpha \in \Omega(X, x_0, x = f(y))$, e solleviamo $f \circ \alpha$ partendo da e_0. Il suo punto finale sarà $g(y)$, cioè poniamo

$$g(y) = Mon(e_0, f\circ\alpha).$$

Dim. che g è ben definita ($g(y)$ non dip. dalla scelta di α) e continua.

Sia $\beta \in \Omega(Y, y_0, y)$. Allora $\alpha * i(\beta) \in \Omega(Y, y_0, y_0)$,



e $\quad f_*([\alpha * i(\beta)]) = [f\circ(\alpha * i(\beta))] \in Im(f_*)$.

Per l'inclusione che stiamo assumendo, $[f\circ(\alpha * i(\beta))] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Da questo segue $\quad Mon(e_0, f\circ(\alpha * i(\beta))) = e_0$.

D'altronde $\quad f\circ(\alpha * i(\beta)) = (f\circ\alpha) * (f\circ i(\beta))$, allora

$$Mon(e_0, (f\circ\alpha) * (f\circ i(\beta))) =$$

$$Mon(Mon(e_0, f\circ\alpha), \underbrace{f\circ i(\beta)}_{= i(f\circ\beta)}) = e_0$$

Segue:

$$Mon(Mon(Mon(e_0, f\circ\alpha), i(f\circ\beta)), f\circ\beta) = Mon(e_0, f\circ\beta)$$

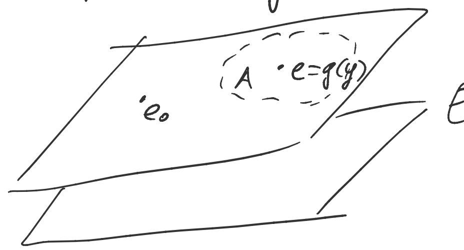
$$\mathrm{Mon}\left(\mathrm{Mon}''\left(\mathrm{Mon}(e_0, f\circ\alpha),\ i(f\circ\beta)\right),\ f\circ\beta\right) = \mathrm{Mon}(e_0, f\circ\beta)$$

fare questo passaggio "torna indietro" sul percorso che ho fatto con $i(f\circ\beta)$

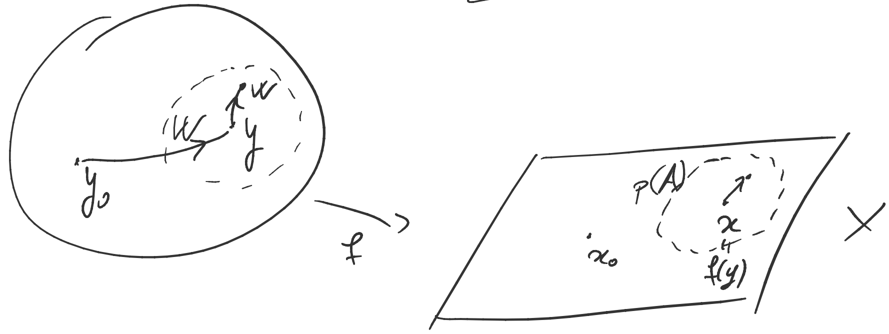
ma il primo membro è $\mathrm{Mon}(e_0, f\circ\alpha)$. Segue che g è ben def..

Per costruzione g solleva f, rimane da dim. che g è continua.

Dim. che $g: Y \to E$ è continua in y $\forall y \in Y$. Consid. $g(y)$ e un intorno ap. $A \subseteq E$ di $g(y)$, troviamo un int. ap. W di y in Y tale che $g(W) \subseteq A$.



Possiamo assumere che A sia contenuto in uno degli ap. della def. di rivestimento, cioè $p|_A : A \to p(A)$ omeomorfismo, $p(A)$ aperto in X.



Scelgo W intorno di y in Y tale che W è connesso per archi, e tale che $f(W) \subseteq p(A)$. <u>Esercizio</u>: dim. che $g(W) \subseteq A$, definendo per ogni $w \in W$ un cammino $\beta_w \in \Omega(W, y, w)$, e usando β_w (aiutato ad un cammino fissato da y_0 a y) per def. $g(w)$.

usando β_w (giuntato ad un cammino fissato da y_0 a y) per def. $g(w)$.

$\square$

<u>Complementi</u>: Molti spazi topologici hanno un rivestimento <u>universale</u>, cioè tale che lo spazio totale è semplicemente connesso.

E' naturale distinguere fra spazi topologici il cui rivestim. universale è contraibile, e quelli in cui non lo è.

Ad esempio S^2 è semplicemente connesso (e coincide col suo rivestim. universale) ma <u>non è contraibile</u>.

Questo si può dimostrare usando i <u>gruppi di omotopia superiore</u>

$\pi_n(X,x) = \{$ classi di omotopia di appl. $[0,1]^n \longrightarrow X$, tali che il "bordo" di $[0,1]^n$ va in x, e le omotopie mantengono questa proprietà per ogni valore del param. $\}$

Tuttavia i $\pi_n(X,x)$ sono difficili da calcolare, ad es. in generale $\pi_n(S^k)$ non è noto (lo è solo per particolari n e k, ad es. $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$).

In top. algebrica si usano allora altri strumenti un po' simili ai gruppi di omotopia, ad es. l'omologia (e coomologia) singolare.

... top. algebrica ...

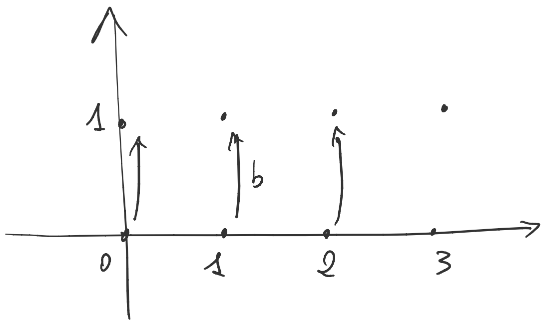
ai gruppi di omotopia, ad es. l'omologia (e coomologia) singolare.

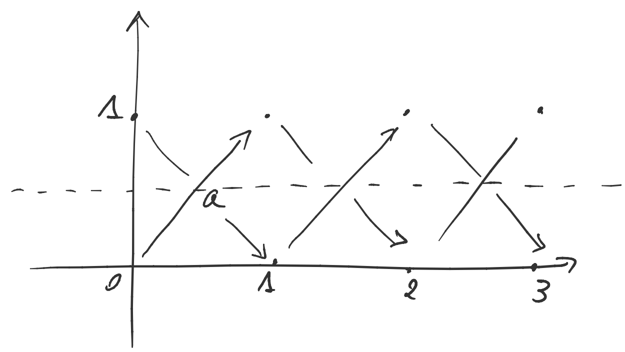
Esempi ed esercizi

Esempio: Sia $E=\mathbb{R}^2$, $G\subseteq \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ generato da:

$$a, b : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a(x,y) = (x+1,\ 1-y) \qquad b(x,y) = (x,\ y+1)$$



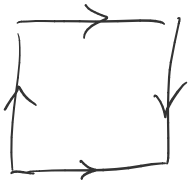


E' facile vedere che G agisce in modo propriam. discontinuo.

Per visualizzare il quoziente E/G si può osservare che usando G si può portare qualsiasi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ in $[0,1]\times[0,1]$ (ad es. si può usare prima una potenza di a per avere l'ascissa in $[0,1]$, e poi una potenza di b per avere l'ordinata in $[0,1]$.)

Allora $p: E \to E/G$ ristretta a $[0,1]\times[0,1]$ è suriettiva, e possiamo vedere E/G come ottenuto da $[0,1]\times[0,1]$ identificando alcuni punti (sul bordo). Viene la stessa identif. della bottiglia di e possiamo vedere [illegible]

alcuni punti (sul bordo). Viene la stessa identif. della bottiglia di Klein:



Dai risultati di oggi: $\pi_1(\text{bottiglia di Klein}) \cong G$

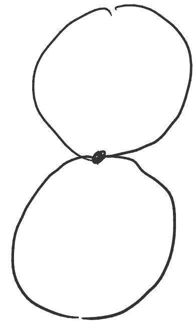
(perché E è sempl. connesso).

Osserviamo che G <u>non è</u> abeliano, infatti $(a \circ b)(0,0) = (1,0)$

e $(b \circ a)(0,0) = (1,2)$, per cui $a \circ b \neq b \circ a$.

Cioè abb. uno spazio topologico con gruppo fondamentale <u>non</u> abeliano.

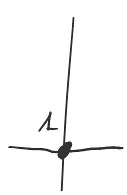
<u>Esempio</u>: (dal libro di Manetti)

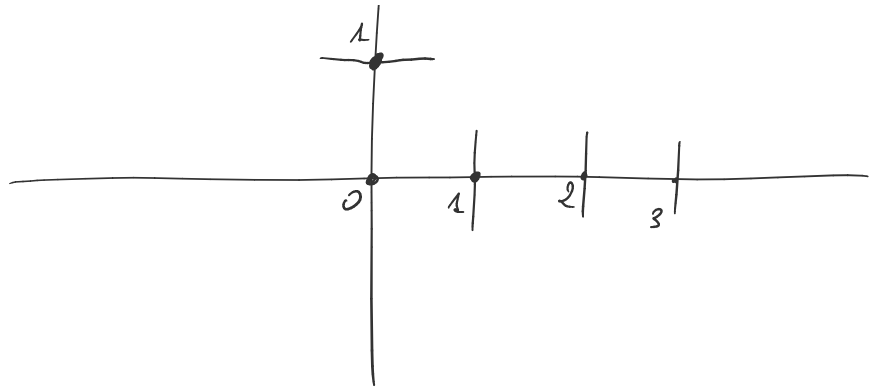
$X =$  = due circonferenze che si toccano in un punto

allora $\pi_1(X)$ non è abeliano.

<u>Esercizio</u>: Descrivere il rivestim. universale di X

(sugg.: „partire" da due rette incidenti, ciascuna riveste una delle due circonferenze come al solito)





circonferenze
come al solito)

<u>Esercizio</u> (già dato): Sia X spazio metrico <u>non compatto</u>.

Dim. che esiste $f: X \to \mathbb{R}$ continua non limitata.

<u>Svolgimento</u>: X non è compatto per successioni, sia $n \mapsto x_n \in X$ una successione da cui non si può estrarre una sottosucc. convergente.

Quindi $\forall x \in X \ \exists r_x > 0 \mid B(x, r_x) \not\ni x_n \ \forall n$ opp.

$\exists n \mid x = x_n$, ma $x = x_m$ solo per un numero finito di m.

Posso assumere (prendendo una sottosucc.) che $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$.

Inoltre posso assumere che $B(x_n, r_{x_n}) \cap B(x_m, r_{x_m}) = \emptyset$ $\forall m \neq n$ (ad es. scegliendo $r_{x_1} < \dfrac{d(x_1, x_i)}{2}$ $\forall i > 1$, $r_{x_2} < \dfrac{d(x_2, x_i)}{2}$ $\forall i > 2$, ecc....).

Definisco allora

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\notin B(x_i,r_{x_i})\ \forall i\\ 1-\dfrac{d(x,x_1)}{r_{x_1}} & \text{se } x\in B(x_1,r_{x_1})\\ 2-\dfrac{2\,d(x,x_2)}{r_{x_2}} & \text{se } x\in B(x_2,r_{x_2})\\ \vdots & \end{cases}$$

grafico di f

f così definita rischia di non essere continua, per esercizio: aggiustare un po' la costruzione per avere f continua.