Geometria 2, Lezione 24

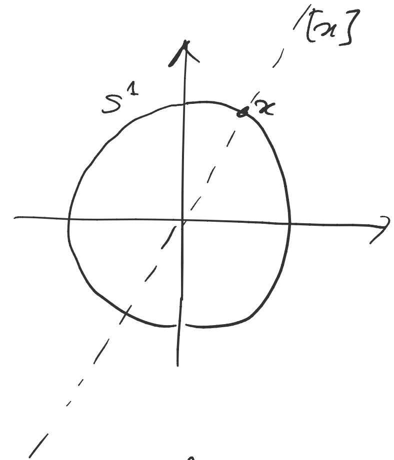
Monday, 17 May 2021 06:39

Esempi:

Esempio 1: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con $n \geq 1$.

Consideriamo $p: S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$

$x \longmapsto [x]$



Dato $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, abb. $p^{-1}([x]) = \{x, -x\}$

Allora è facile dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è omeomorfo a $S^n/\sim$

dove $\sim$ identifica x e $-x$ $\forall x \in S^n$. (Che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ sia in biiezione naturale con $S^n/\sim$ è ovvio, dim. per esercizio che è un omeomorfismo).

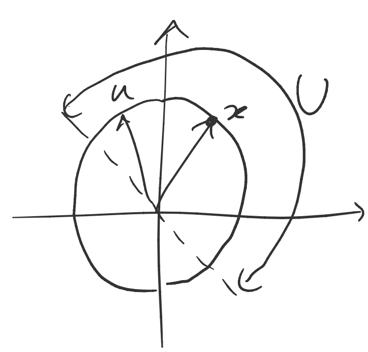
Inoltre la relaz. $\sim$ si può vedere come indotta da $G \subseteq \mathrm{Omeo}(S^n)$

dove $G = \{Id_{S^n}, \sigma\}$, quindi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \dfrac{S^n}{G}$.

antipodo, $\sigma(x) = -x$

Inoltre G agisce in modo propriam. discontinuo, perché dato $x \in S^n$ e $g \in G$, possiamo definire $U = \{u \in S^n \mid u \cdot x > 0\}$

prod. scalare standard



Se $g \neq Id_{S^n}$ allora $g = \sigma$ e $\sigma(U) = -U$ e vale $\sigma(U) \cap U = \emptyset$

Se $g \neq Id_{S^n}$ allora $g = \sigma$ e $\sigma(U) = -U$, e vale $\sigma(U) \cap U = \emptyset$.

Deduciamo: p è un rivestimento, di grado 2.

Descriviamo anche aperti banalizzanti e sezioni locali. Dato $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, definiamo $V = p(U)$, allora V è un aperto banalizzante e

$$p^{-1}(V) = U \cup (-U), \quad \text{e} \quad p|_U : U \to V, \quad p|_{-U} : -U \to V$$

sono omeomorfismi, con inverse

$$(p|_U)^{-1} : V \to U \qquad [u] \mapsto u \quad \text{con } u \in U$$

$$(p|_{-U})^{-1} : V \to -U \qquad [u] \mapsto -u \quad \text{con } u \in U$$

(si verifica facilmente che sono ben definite e continue).

Dimostriamo che p <u>non ha</u> sezioni continue. Supp per assurdo che esista $s : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to S^n$ sezione continua di p.

Definiamo

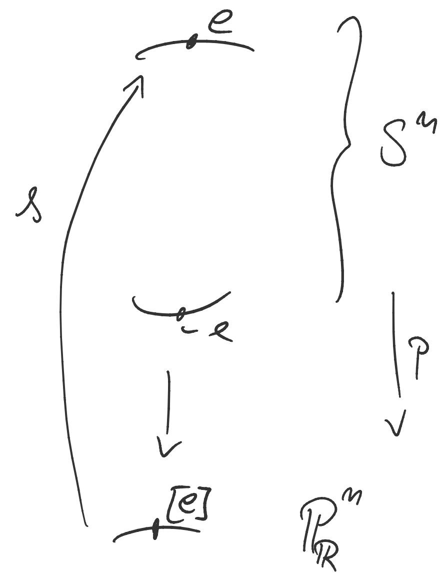
$$A = \{ e \in S^n \mid s(p(e)) = e \}$$

$$B = \{ e \in S^n \mid s(p(e)) = -e \}$$

Allora $A \cup B = S^n$. Verifichiamo che A e B sono aperti in S^n. Sia $e \in A$

in S^n. Sia $e \in A$

e $U = \{u \in S^n \mid u \cdot e > 0\}$, $V = p(U)$,



allora $s|_V$ è sezione locale

che vale e in [e]. Per l'unicità

delle sez. locali (V è connesso),

abb s coincide con $\left(p|_U\right)^{-1}$ di prima. Segue: U è tutto contenuto

in A. Lo stesso ragionam. con B implica: B è aperto.

quindi A è aperto

Visto che S^n è connesso, abbiamo $S^n = A$ opp $S^n = B$.

Segue: $s \circ p = Id_{S^n}$, quindi p deve essere iniettiva, ma non lo è: assurdo (se $S^n = A$) oppure $s \circ p = \sigma$, e anche σ è iniettiva, quindi è assurdo (se $S^n = B$). Allora p non ha sezioni continue.

Monodromia

Obiettivo: Dato un rivestimento $p: E \to X$, studiare i legami fra

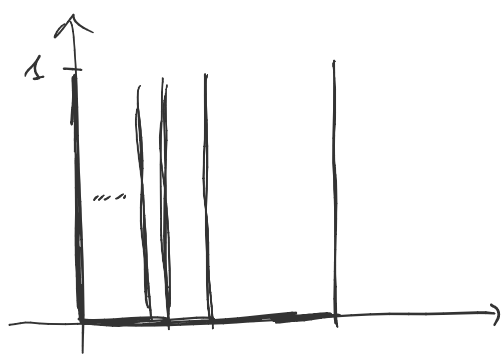
Obiettivo: Dato un rivestimento $p: E \to X$, studiare i legami fra

$$\pi_1(E), \quad \pi_1(X), \quad p^{-1}(x) \quad \text{con } x \in X.$$

In tutta questa sezione assumeremo: E, X connessi per archi e localmente connessi per archi, cioè ogni punto ha un sistema fondam. di intorni connessi per archi.

Esempio: La connessione per archi non implica la locale connessione per archi: ad esempio

$$X \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{definito come} \quad X = \left([0,1] \times \{0\}\right) \cup \left(\{0\} \times [0,1]\right) \cup \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n > 0}} \left\{\tfrac{1}{n}\right\} \times [0,1]$$



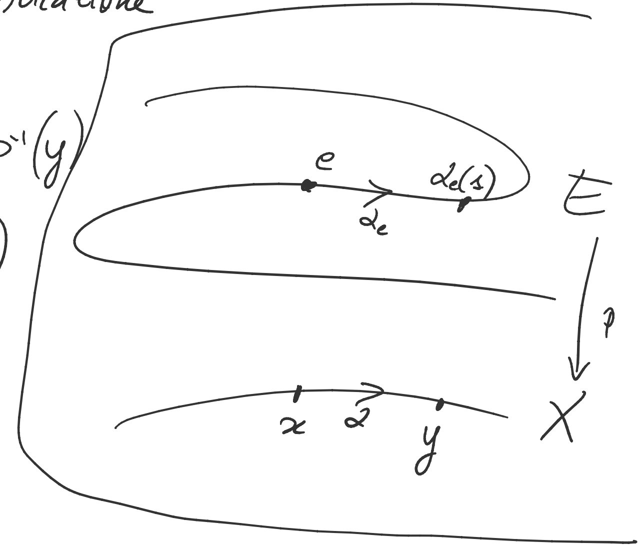
X è connesso per archi ma non localmente connesso per archi, ad es. in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ l'intorno $B\left(\left(0, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{4}\right) \cap X$

$(0, \tfrac{1}{2})$

ha infinite comp. connesse per archi e non contiene alcun intorno connesso per archi di $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Definizione: Sia $p: E \to X$ (con E e X come sopra), $x, y \in X$.

Si chiama <u>monodromia</u> l'applicazione



$$\mathrm{Mon}: p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) \to p^{-1}(y)$$
$$(e, \alpha) \longmapsto \alpha_e(1)$$

(ric.: α_e è il cammino che solleva α e parte da e)

Oss.: Dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ con $\alpha \sim \beta$ allora sappiamo che $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$, e allora $\mathrm{Mon}(e, \alpha) = \mathrm{Mon}(e, \beta)$ $\forall e \in p^{-1}(x)$.

Def.: Grazie all'osservazione, è anche ben definita l'applicazione

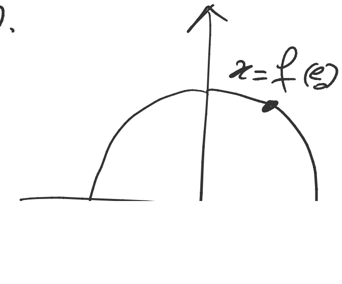
(prendo $x = y$)

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$$
$$(e, [\alpha]) \longmapsto \alpha_e(1) = \mathrm{Mon}(e, \alpha)$$

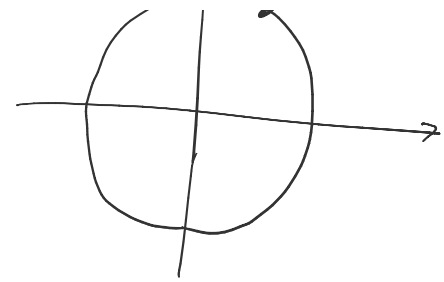
La notazione per questa applicazione è $e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$.

Esempio: Sia $f: \mathbb{R} \to S^1$ il solito rivestimento.

Sia $e_0 \in \mathbb{R}$ e $x = f(e_0) \in S^1$.



Sia $e_0 \in \mathbb{R}$ e $x = f(e_0) \in S^1$.



L'applicazione della seconda def. è

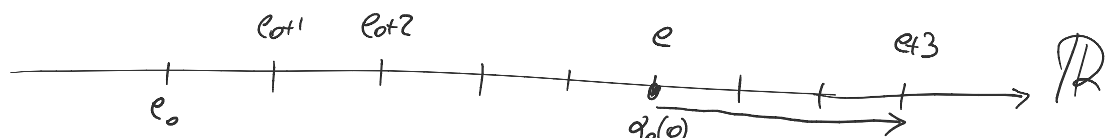
$$f^{-1}(x) \times \pi_1(S^1, x) \longrightarrow f^{-1}(x)$$

$$(e, \underbrace{[\alpha]}_{\alpha : \Omega(S^1, x, x)}) \longmapsto \alpha_e(1)$$

$\alpha : \Omega(S^1, x, x)$, e spp. che nell'isom. usuale $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$ la classe $[\alpha]$ corrisp. a $n \in \mathbb{Z}$.

Allora il sollevamento di α partendo da e va da e a $e+n$.

Allora $\alpha_e(1) = e + n$, e posso scrivere $e \cdot [\alpha] = e + n$



ad es. se $[\alpha] \leftrightarrow 3 \in \mathbb{Z}$

<u>Oss.</u>: Siano $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ e $\beta \in \Omega(X, y, z)$.

Scelto $e \in p^{-1}(x)$, abb.: $(\alpha * \beta)_e = \alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)}$.

(perché α_e parte da e e finisce in $\alpha_e(1)$). Usando Mon, questo si scrive:

$$\mathrm{Mon}(e, \alpha * \beta) = \mathrm{Mon}(\underbrace{\mathrm{Mon}(e, \alpha)}_{\alpha_e(1)}, \beta)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\alpha_e(1)}}_{\text{punto finale di } \beta_{\alpha_e(1)}}$$

In particolare, se $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, x)$, questa uguaglianza si scrive anche

$$e \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = (e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$$

nuova notazione — prodotto in $\pi_1(X, x)$, cioè $[\alpha * \beta]$ — nuova notazione

(Nella terminologia delle <u>azioni</u> di gruppi su insiemi, questo definisce allora un'azione <u>destra</u> di $\pi_1(X, x)$ su $p^{-1}(x)$.)

<u>Teorema</u>: Sia $p : E \to X$ rivestim. come sopra. Sia $e \in E$ e $x = p(e)$.

1) $p_* : \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, x)$

è iniettiva, e vale $p_*(\pi_1(E, e)) = \{ [\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid e \cdot [\alpha] = e \}$.

2) L'applicazione

$$\underbrace{\pi_1(X, x) / p_*(\pi_1(E, e))}_{\substack{\text{il quoziente di gruppi, cioè} \\ \text{l'insieme delle classi laterali}}} \longrightarrow p^{-1}(x)$$

il quoziente di gruppi, cioè
l'insieme delle classi laterali
destre

definita come $\underbrace{\big(p_*(\pi_1(E,e))\big)\underbrace{[\alpha]}_{\in \pi_1(X,x)}}_{\text{classe laterale destra di } [\alpha]} \longmapsto e\cdot[\alpha]$

è biiettiva.

Dim.: 1) Sappiamo che p_* è omomorfismo di gruppi, sia $[\alpha]\in\pi_1(E,e)$ tale che $p_*([\alpha])$ sia banale, cioè $p\circ\alpha \sim 1_x$. D'altronde α solleva $p\circ\alpha$ partendo da e, e 1_e solleva 1_x partendo da e. Da una proposizione vista abb. $\alpha\sim 1_e$, cioè $[\alpha]$ banale. Segue: p_* iniettiva.

Dimostriamo l'uguaglianza fra gli insiemi:

$\subseteq$ Sia $[\gamma]\in p_*(\pi_1(E,e))$ cioè esiste $\delta\in\pi_1(E,e)$ tale che $[\gamma]=[p\circ\delta]$, e visto che δ solleva $p\circ\delta$ e finisce in $\delta(1)=e$, allora $e\cdot[\gamma]=e$.

$\supseteq$ Sia $[\sigma]\in\pi_1(X,x)$ tale che $e\cdot[\sigma]=e$, cioè

$\supseteq$] Sia $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$ tale che $e \cdot [\sigma] = e$, cioè il sollevato σ_e è in $\pi_1(E, e)$. Cioè $[\sigma] = p_*(\underbrace{[\sigma_e]}_{\text{è un elt di } \pi_1(E,e)})$.

2) <u>Iniettività</u>: Siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x)$ tali che $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta]$. Allora

$$
\begin{array}{ccc}
(e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]^{-1} & = & e \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]^{-1}) \\
\| & & \\
(e \cdot [\beta]) \cdot [\beta]^{-1} & = & e \cdot (\underbrace{[\beta] \cdot [\beta]^{-1}}_{= [1_x]}) = e
\end{array}
$$

Segue da 1): $[\alpha]$ e $[\beta]$ hanno stessa classe lat. destra rispetto a $p_*(\pi_1(E, e))$.

<u>Suriettività</u>: Usiamo che E è connesso per archi. Sia $e' \in p^{-1}(x)$ e prendiamo $K \in \Omega(E, e, e')$. Allora K sollera $p \circ K \in \Omega(X, x, x)$. Per definizione di monodromia allora $e \cdot [p \circ K] = e'$, cioè e' è nell'immagine dell'applicazione.

$\square$

Corollario: $\pi_1(\mathbb{P}^n, x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\forall n \geq 2$.

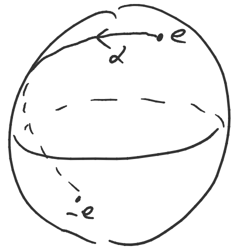
Dim.: Abb. visto il rivestimento $p: S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, e sappiamo che

$|p^{-1}(x)| = 2$ per ogni $x \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Visto che $n \geq 2$, sappiamo che $\pi_1(S^n, e)$ è banale, e dal teorema (parte 2) deduciamo $|\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}, x)| = 2$.

A meno di isomorfismo c'è un solo gruppo con due elementi, ed è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

Oss.: Pensando a $S^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, è intuitivo che $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}, x)$ sia $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



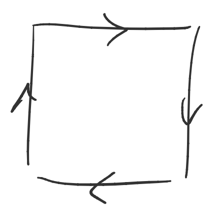
Se α è come in figura da e a $-e$, allora ovviamente $p \circ \alpha$ non è omotopo al cammino costante.

Però posso fare la giunzione di α con il „cammino antipodale", e ottengo un cammino chiuso in S^2 la cui immagine in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è lo stesso cammino di $p \circ \alpha$ percorso due volte. In S^2 α è omotopo al cammino banale, quindi $2[p \circ \alpha] = [1_x]$.

Si può vedere la cosa anche considerando solo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, vedendo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ come $D^2/_{\sim}$ dove $\sim$ identifica x e $-x$

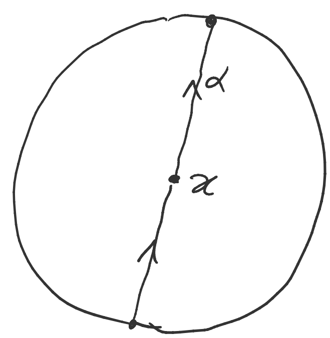
disco chiuso in $\mathbb{R}^2$

per $x \in S^1 (\subseteq D^2)$. Ritroviamo un esempio già visto lasciato in sospeso:

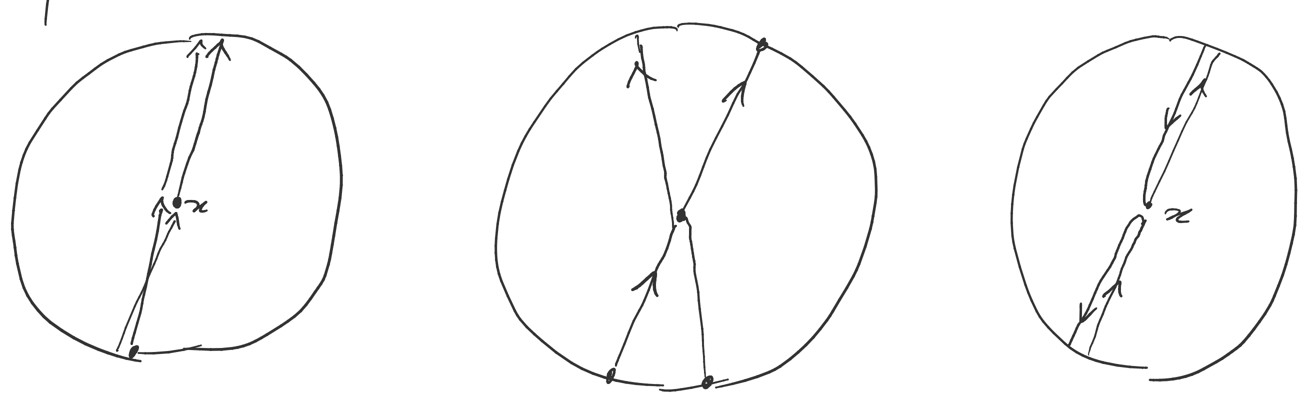


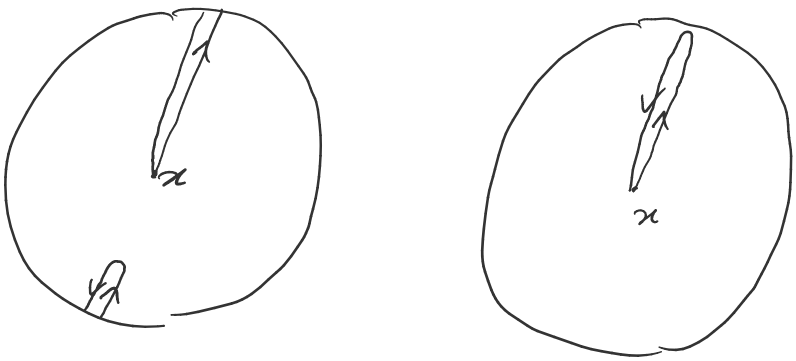
è omeomorfo a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Torniamo a $D^2/_{\sim}$:



percorrendo α due volte ho:





<u>Altri esempi:</u> Abb. visto $S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ omeomorfo a S^1, fibra omeomorfa a $S^0 = \{1, -1\}$.

Si fa la stessa cosa con $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ \cap & & \parallel \\ \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 & & S^2 \end{array}$$

la fibra è omeomorfa a S^1 (perché se due vettori di $\mathbb{C}^n$ differiscono per un $\lambda \in \mathbb{C}$ di modulo 1, allora sto identificando le fibre con $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$)

Anche con i quaternioni $\mathbb{H}$

$$\begin{array}{ccc} S^7 & \longrightarrow & S^3 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{H}} \\ \cap & & \\ \mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8 & & \end{array}$$

con fibra S^4

e con gli ottetti di Cayley $\mathbb{O}$:

S^{15} $\quad S^7$ $\quad \cap \quad S^8$

$$S^{15} \longrightarrow S^{7} \quad \text{con fibra } S^{8}.$$

$$\cap$$

$$\mathbb{O}^2 = \mathbb{R}^{16}$$