Geometria 2, Lezione 22

Tuesday, 11 May 2021 12:11

Sezioni

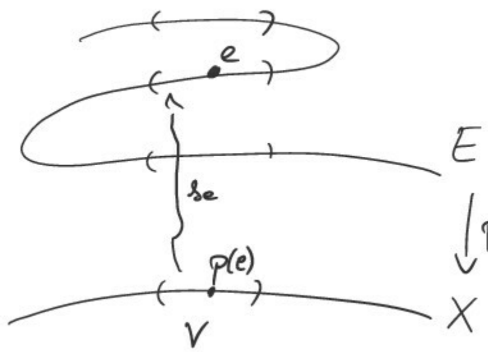
Data $f: X \to Y$ applicazione qualsiasi, una <u>sezione</u> di f è un'applicazione $s: Y \to X$ tale che $f \circ s = Id_Y$.

<u>Oss.</u>: In tal caso s è iniettiva.

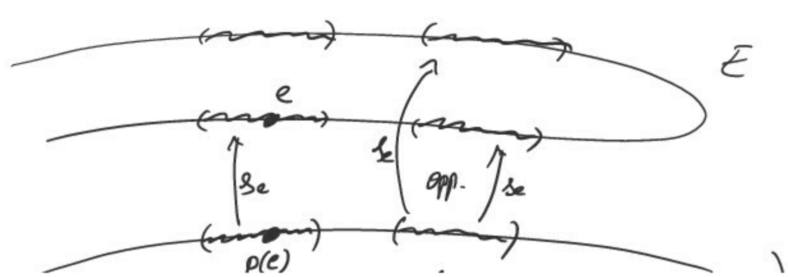
<u>Es.</u>: Se X e Y sono spazi topologici e f è continua, allora potrebbe non avere sezioni continue. Ad es.

$f: \mathbb{R} \to S^1$ non ha sezioni continue, perché una sezione sarebbe un'appl. continua $s: S^1 \to \mathbb{R}$ iniettiva, e sappiamo che non esiste.

<u>Lemma</u>: Sia $p: E \to X$ un rivestimento, e sia $V \subseteq X$ un aperto banalizzante. Dato $e \in p^{-1}(V)$, esiste $s_e: V \to p^{-1}(V)$ sezione <u>continua</u> di $p|_{p^{-1}(V)}: p^{-1}(V) \to V$ tale che $s_e(p(e)) = e$.



(non è detto che s_e sia unica



Se V è connesso, allora una tale s_e è unica.

<u>Dim.</u>: Scriviamo $p^{-1}(V)$ come unione di aperti disgiunti come nella def. di rivestimento. Sia U l'aperto fra questi contenente e, allora $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo. Basta porre $s_e = (p|_U)^{-1} : V \to U$ e considerarla come applicazione $V \longrightarrow p^{-1}(V)$. Quindi s_e esiste.
Supponiamo V connesso, dim. che s_e è unica. Scriviamo

$$p^{-1}(V) = \underbrace{U \cup W}$$

unione degli altri aperti della def. di rivestimento

Abb.: U è una componente connessa di $p^{-1}(V)$, è quella contenente e. Sia ora $s' : V \to p^{-1}(V)$ sezione continua tale che $s'(p(e)) = e$. Allora $s'(V)$ è connesso e interseca U, quindi è contenuto in U. Segue: s' è inversa destra di $p|_U : U \to V$, che è una biiezione, quindi $s' = s_e$. $\square$

Def.: Una s_e come nel lemma si chiama anche sezione *locale* di p.

Sollevamento di cammini e di omotopie

Def.: Sia $p: E \to X$ un rivestimento, e siano Y uno spazio topologico e $f: Y \to X$ un'appl. continua. Un *sollevamento* di f è un'applicaz. continua $g: Y \to E$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $f = p \circ g$.

Teorema: Siano $p: E \to X$ un rivestimento, Y sp. topologico connesso, e $f: Y \to X$ continua. Siano g, h sollevamenti di f. Allora $g = h$ oppure $\forall y \in Y: g(y) \neq h(y)$.

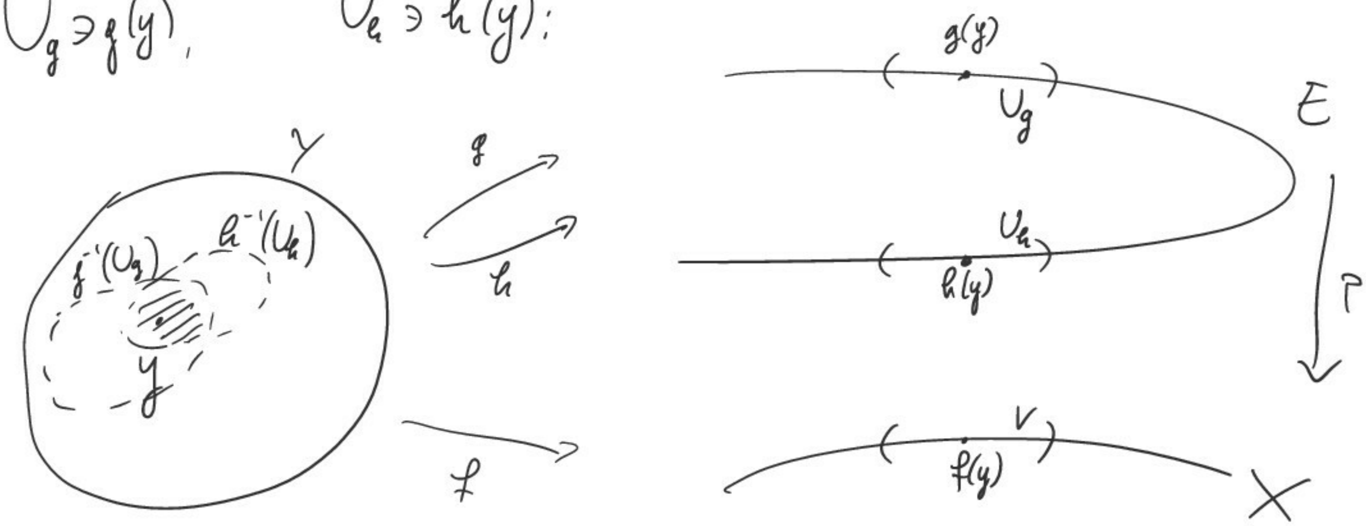
Dim.: Consid. $A = \{ y \in Y \mid g(y) = h(y) \}$, dim. che A è aperto e chiuso.

Sia $y \in Y$, prendiamo $V \subseteq X$ aperto banalizzante in X contenente

[illegible] $\subseteq E$ [illegible]

Sia $y \in Y$, prendiamo $V \subseteq X$ aperto banalizzante in X contenente $f(y)$, e prendiamo $U_g, U_h \subseteq E$ aperti della def. di rivestimento tali che $p|_{U_g} : U_g \to V$ omeom. (lo stesso con U_h), e

$U_g \ni g(y)$, $U_h \ni h(y)$:



Consid. $W = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$. E' un intorno aperto di y in Y.

Supponiamo $y \in A$, cioè $g(y) = h(y)$. Allora $U_g = U_h$, e allora $\forall w \in W$ abb. $g(w)$ e $h(w) \in U_g$. D'altronde $p(g(w)) = f(w) = p(h(w))$ e p è iniettiva su U_g, quindi $g(w) = h(w)$.

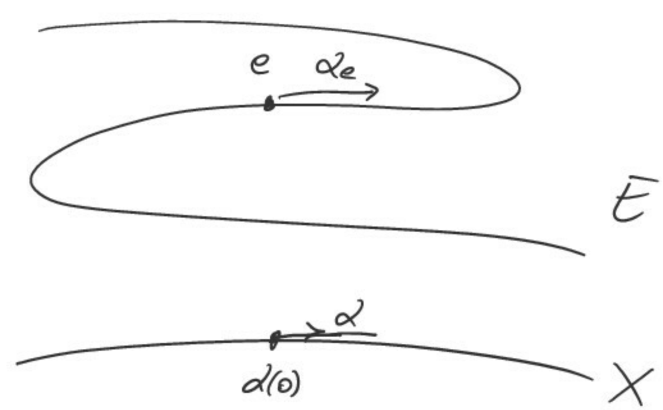
Supponiamo invece che $y \notin A$. Allora U_g e U_h sono disgiunti, e $\forall w \in W$ abb. $g(w) \in U_g$, $h(w) \in U_h$, quindi $g(w) \neq h(w)$.

Cioè: nel primo caso $W \subseteq A$, nel secondo caso $W \subseteq Y \setminus A$.

Segue: A e $Y \setminus A$ sono entrambi intorni di ogni loro punto, cioè segue: A e $Y \setminus A$ sono entrambi intorni di ogni loro punto, cioè sono aperti. Visto che Y è connesso, allora $A = Y$ cioè $g = h$, oppure $A = \emptyset$ cioè $g(y) \neq h(y)$ $\forall y \in Y$. $\square$

<u>Corollario</u>: Sia $E \xrightarrow{p} X$ un rivestim. e $f: Y \to X$ come prima.
Dato $y \in Y$ e $e \in p^{-1}(f(y))$, esiste al più <u>un</u> sollevamento g di f tale che $g(y) = e$.

<u>Teorema</u> (sollevamento di cammini): Siano $p: E \to X$ un rivestimento, $\alpha: [0,1] \to X$ continua, sia $e \in E$ tale che $p(e) = \alpha(0)$.
Allora esiste un unico sollevamento $\alpha_e: [0,1] \to E$ di α tale che $\alpha_e(0) = e$.



<u>Dim.</u>: L'unicità segue dall'ultimo corollario, dimostriamo che α_e <u>esiste</u>.
Consid. $\mathcal{R} = \{ V \mid V \subseteq X \text{ aperto banalizzante} \}$, è un ricoprimento aperto di X.

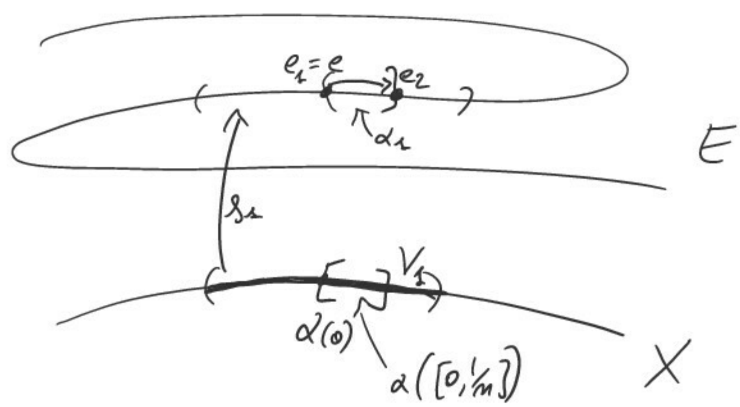
ricoprimento aperto di X.

Per il Corollario al Teo. del numero di Lebesgue esiste $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e aperti $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$\alpha\left(\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]\right) \subseteq V_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Sia $s_1 : V_1 \longrightarrow p^{-1}(V_1)$ la sezione locale di p tale che $s_1(\alpha(0)) = e$, e definiamo

$$\alpha_1 : \left[0, \frac{1}{m}\right] \longrightarrow E \qquad \text{come} \qquad \alpha_1 = s_1 \circ \alpha$$



Poniamo anche $e_1 = e$, $\quad e_2 = \alpha_1\left(\frac{1}{m}\right)$.

Continuiamo con $\alpha_2 : \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right] \longrightarrow E$ che solleva $\alpha|_{[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]}$ partendo da e_2, cioè scegliamo $s_2 : V_2 \to p^{-1}(V_2)$ sezione locale e poniamo $\alpha_2 = s_2 \circ \alpha$.

Proseguiamo fino a $\alpha_{m-1} : \left[\frac{m-1}{m}, 1\right] \longrightarrow E$ che solleva

Proseguiamo fino a $\alpha_{n-1} : \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \longrightarrow E$ che solleva

$\alpha\Big|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]}$.

Definiamo $\alpha_e : [0,1] \longrightarrow E$

$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \alpha_2(t) & \text{per } t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ \vdots & \\ \alpha_{n-1}(t) & \text{per } t \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Otteniamo un cammino, cioè α_e è continua, e per costruzione

$\alpha_e(0) = e$ e anche $p(\alpha_e(t)) = \alpha(t) \quad \forall t \in [0,1]$.

$\square$

<u>Esempio:</u> Consid. $\alpha : [0,1] \longrightarrow S^1$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

e il solito rivestimento $\mathbb{R} \xrightarrow{f} S^1$. Allora scegliamo

un $e \in \mathbb{R}$ tale che $f(e) = (1,0) = \alpha(0)$. Ad es. $e = 0$.

Allora $\alpha_e : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto t$$

Preso invece $\beta : [0,1] \to S^1$ con $\beta(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$,

[illegible]

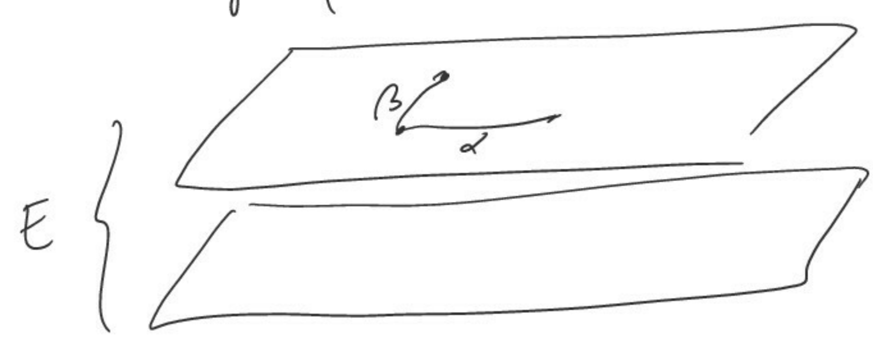
Preso invece

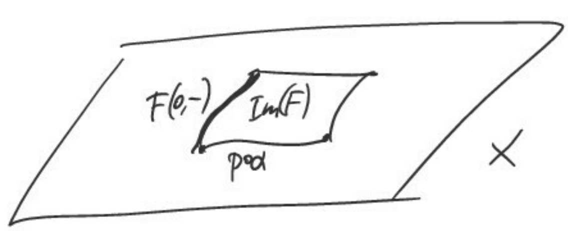
il sollevamento con lo stesso $e=0$ è $\beta_e : [0,1] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto 2t$.

<u>Teorema</u> (Sollevamento dell'omotopia di cammini) Siano $p: E \to X$ un rivestimento, $F: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ continua, sia $\alpha: [0,1] \longrightarrow E$ continua tale che $p(\alpha(t)) = F(t,0)$ $\forall t \in [0,1]$. Allora esiste un unico sollevamento G di F tale che $G(t,0) = \alpha(t)$ $\forall t \in [0,1]$.

<u>Dim.:</u> L'unicità è già nota, dimostriamo l'esistenza di G.

Def. $\beta: [0,1] \longrightarrow E$ solleram. di $s \longmapsto F(0,s)$ tale che $\beta(0) = \alpha(0)$.





Incollando α e β ottengo un'applicazione g da $L =$

[illegible]

$=([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1])$ in E.

Dimostriamo che esiste un sollevam. G di F che coincide con g su L.

Due casi:

1) Supponiamo $F([0,1]\times[0,1])$ contenuta in un aperto banalizzante V. Visto che L è connesso, esiste un unico aperto U della def. di rivestimento, tale che $g(L)\subseteq U$. Sia $s: V\to U$ la sezione locale, e basta definire

$$G = s\circ F.$$

2) Supponiamo che $F([0,1]\times[0,1])$ non sia contenuta in un aperto banalizzante.

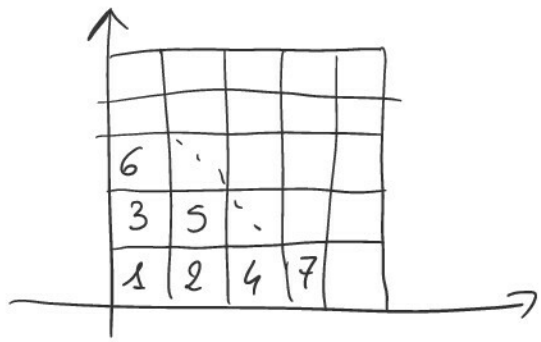
Per il teorema del numero di Lebesgue (lasciamo i dettagli per esercizio) possiamo suddividere $[0,1]\times[0,1]$ nei quadrati

$$Q_{ij} = \left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]$$

con n tale che $F(Q_{ij})$ è contenuto in un aperto banalizzante V_{ij} $\forall i,j\in\{1,..,n\}$.

banalizzante V_{ij} $\forall i,j \in \{1,\dots,m\}$.

Solleviamo $F|_{Q_{ij}}$ nel modo seguente: ordiniamo $(\mathbb{Z}_{>0})^2$ nel modo seguente:



$(i,j) \leq (h,k) \iff i+j < h+k$ oppure $i+j = h+k$ e $j \leq k$.

Per ogni Q_{ij} sollevo $F|_{Q_{ij}}$ usando il caso 1),

e questo definisce ricorsivamente il sollevamento

$$G_{(h,k)} : L \cup \bigcup_{(i,j)\leq(h,k)} Q_{ij} \longrightarrow E$$

Abb.: $G_{(m,m)} = G$ è il sollevamento voluto di F. $\square$

<u>Prop.</u>: Sia $p: E \to X$ rivestimento, $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$, $e \in E$ tale che $p(e)=a$. Siano α_e, β_e sollevamenti di α e β rispettivam., tali che $\alpha_e(0)=\beta_e(0)=e$. Allora sono equivalenti:

($\sim$ = omotopia

1) $\alpha \sim \beta$

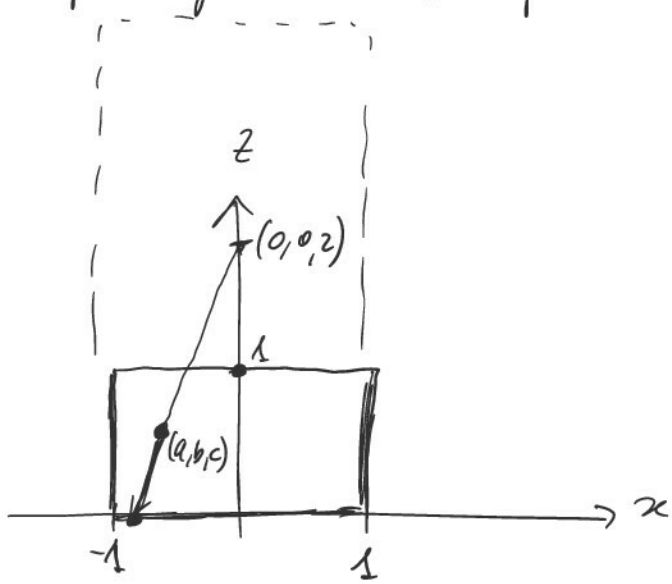
1) $\alpha \sim \beta$ ($\sim$ = omotopia di cammini)

2) $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e $\alpha_e \sim \beta_e$.

Esercizi ed esempi

Esercizio: Avevamo assegnato per esercizio: dimostrare che il cilindro pieno ha come retratto per deformazione la sup. laterale unita a una delle due basi.

In sezione:



Svolgimento: Poniamo $(x, y, z) = (a, b, c) - (0, 0, 2)$

Definiamo la norma $N(x,y,z) = \max\left\{\sqrt{x^2+y^2}, \left|\frac{z}{2}\right|\right\}$

Il luogo dove $N(x,y,z) = t$ fissato è un cilindro.

La deformazione parte (per $s=1$) da (a,b,c) e finisce (per $s=0$) nel „normalizzato" di (x,y,z) ritraslato di $(0,0,2)$.

(per $s=0$) nel „normalizzato" di (x,y,z) ritraslato di $(0,0,2)$, cioè $\frac{(x,y,z)}{N(x,y,z)} + (0,0,2)$. Cioè:

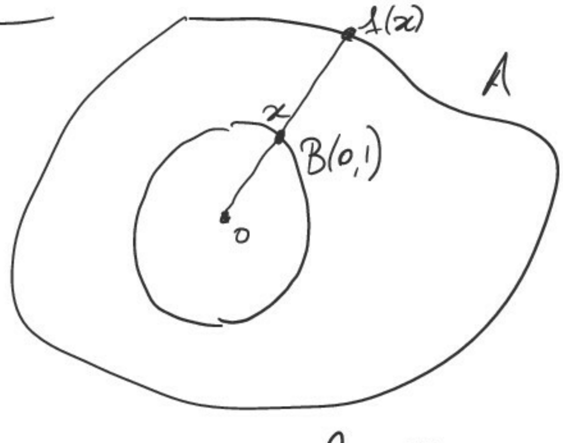
$$R: X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

$$((a,b,c), s) \longmapsto (a,b,c)\cdot s + (1-s)\left(\frac{(a,b,c-2)}{\max\{\sqrt{a^2+b^2}, |\frac{c-2}{2}|\}} + (0,0,2)\right)$$

E' facile verificare che R è continua e $R((a,b,c), s) = (a,b,c)$ se $(a,b,c)\in Y$.

<u>Esercizio</u>: Avevamo già assegnato: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, aperto, limitato. Dimostrare che A è omeomorfo ad una palla aperta in $\mathbb{R}^n$.

<u>Svolgimento</u>: A meno di traslare A, possiamo supporre che $A \ni 0$.



Dimostriamo un enunciato più forte: $\overline{A}$ è omeomorfo a $\underbrace{\overline{B(0,1)}}_{= D}$

Definiamo $f: D \longrightarrow \overline{A}$

Definiamo $f : D \longrightarrow A$

$$x \longmapsto \begin{cases} x \cdot g(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dove $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \max\{t \mid tx \in \overline{A}\} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Da dim.: 1) $f(D) \subseteq \overline{A}$

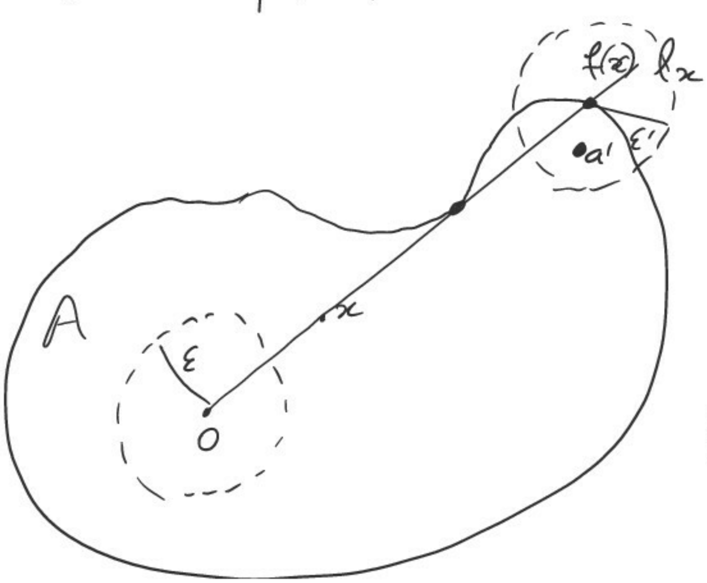
2) f biiettiva

3) f continua

4) f aperta

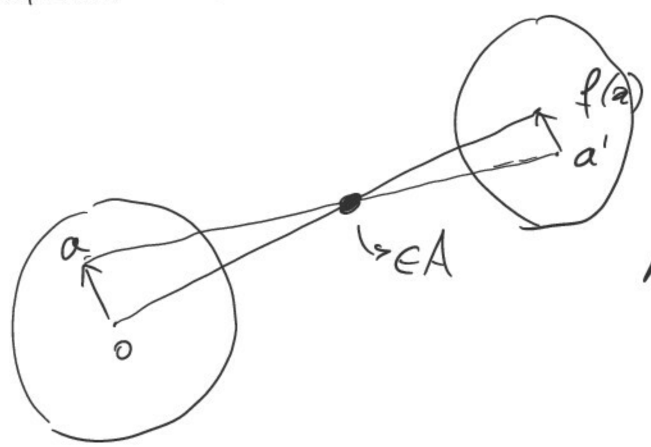
1) Sia $x \in S^n = \partial D$. Poniamo $\ell_x = \{tx \mid t > 0\}$.

Dim. che $\{f(x)\} = \ell_x \cap \partial A$, cioè non succede ad es.



Sicuramente „oltre" $f(x)$ la semiretta ℓ_x non interseca $\overline{A}$. Oss.: $f(x) \in \overline{A}$, quindi $\forall \varepsilon' > 0 \ \exists \, a' \in A \cap B(f(x), \varepsilon')$

D'altronde esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(0, \varepsilon) \subseteq A$.



Poniamo $a = -\dfrac{(f(x) - a')\,\varepsilon}{\varepsilon'}$

Allora $a \in B(0, \varepsilon)$.

Il segmento da a ad a' è contenuto in A, e tocca la semiretta ℓ_x nel punto:

$$a'' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\, a + \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\right) a' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon'}\, f(x)$$

Se $\varepsilon' \to 0$ il punto a'' (che non dip. da a' ma solo da ε') tende a $f(x)$.

Segue: il segmento „aperto" da 0 a $f(x)$ è tutto contenuto in A, cioè non interseca ∂A.

Abb. dimostrato: $\{f(x)\} = \ell_x \cap \partial A$.

Cioè abb. dimostrato che $f|_{S^n}$ è una biiezione $S^n \to \partial A$, ed è l'inverso di $\partial A \to S^n$, che è continua.

ed è l'inverso di $\begin{aligned} \partial A &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$, che è continua.

Quindi $f|_{S^n} = h$ è un omeomorfismo.

Visto che h è una biiezione, segue anche che f è una biiezione (basta pensare alle restrizioni $f|_{\ell_x \cap D}$ per ogni $x \neq 0$).

Inoltre f si scrive anche come

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| \cdot h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

quindi f è continua perchè h è continua.

Di nuovo: f è continua e biiettiva da un compatto in un Hausdorff, quindi è un omeomorfismo che manda S^n in ∂A.