Geometria 2, Lezione 21

Monday, 10 May 2021 08:46

Esercizi ed esempi

Vediamo due esercizi dati per casa:

Es. 1 Se X è sp. topologico di Hausdorff e $A \subseteq X$ retratto, dim. che A è chiuso.

Svolgimento: Sappiamo che esiste $r : X \to A$ continua tale che $r|_A = Id_A$. Proviamo a usare la proprietà: se $f, g : X \to$ (Hausdorff) allora il luogo dove f e g coincidono è chiuso. Proviamo a usare $Id_X : X \to X$ e usiamo, invece di $r : X \to A$, l'applicazione $f : X \to X$, $x \mapsto r(x)$.

Oss.: il luogo dove Id_X e f coincidono contiene A, perché sappiamo $r(a) = a \quad \forall a \in A$. Inoltre è anche contenuto in A, perché se $x \in X$ è tale che $f(x) = Id_X(x) = x$ allora abb. $r(x) = x$, cioè $x \in A$.

Segue: A è chiuso per la proprietà ricordata prima.

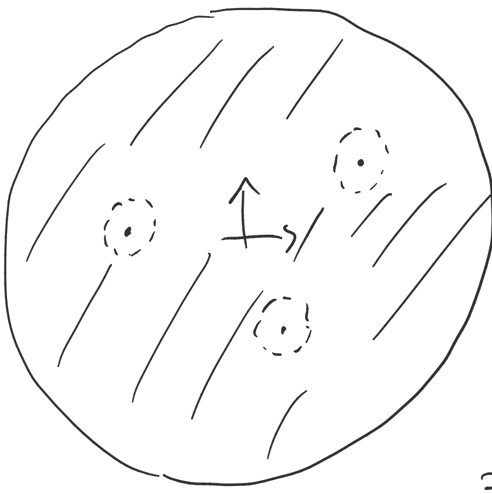
Es. 2: Di. che $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{t \text{ punti}\}$

Es. 2: Dim. che $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{t \text{ punti}\}$ se $s \neq t$.

Svolgimento: Dal suggerimento consid.

$$K_m = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq m, \ \|x - p_i\| \geq \frac{1}{m} \ \forall i \}$$

dove $\{s \text{ punti}\} = \{p_1, \dots, p_s\}$.



Oss: 1) K_m chiuso e limitato $\forall m$, quindi è compatto.

2) $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\} = \bigcup_{m>0} K_m$

3) $K_m \subseteq \mathring{K}_{m+1}$, quindi $\{\mathring{K}_m\}$ è un ricoprim. aperto di $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$.

Consideriamo compatti H_m definiti analogam. per $\mathbb{R}^n \setminus \{t \text{ punti}\}$.

Abb.: $\mathbb{R}^n \setminus K_m$ ha $s+1$ componenti connesse, se m è abbastanza grande, e $\mathbb{R}^n \setminus H_m$ ha $t+1$ componenti connesse se m è abbastanza grande.

Supp. per assurdo che $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \setminus \{t \text{ punti}\}$, Supp. per assurdo che esista $\mathbb{R}^n \setminus \{5 \text{ punti}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{4 \text{ punti}\}$,

f omeomorfismo. Avrei $f(K_m)$ è compatto $\forall m$, ricoprono $\mathbb{R}^n \setminus \{4 \text{ punti}\}$ al variare di m, e anche $f(K_m^\circ)$.

Su $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{4 \text{ punti}\}$ abbiamo le due famiglie con proprietà analoghe: H_m, $f(K_m)$. Allora $\forall m$ esiste N tale che $H_m \subseteq f(K_N)$ (perché H_m è compatto), e esiste M tale che $H_m \subseteq f(K_N) \subseteq H_M$ ed esiste R tale che

$$H_m \subseteq f(K_N) \subseteq H_M \subseteq f(K_R).$$

Prendiamo i complementari:

$$Y \setminus H_m \supseteq Y \setminus f(K_N) \supseteq Y \setminus H_M \supseteq Y \setminus f(K_R)$$

e consideriamo le inclusioni

$$Y \setminus f(K_R) \longrightarrow Y \setminus H_M \longrightarrow Y \setminus f(K_N) \longrightarrow Y \setminus H_m$$

Consideriamo le applicazioni indotte su π_0:

$$\begin{tikzcd} \pi_0(Y \setminus f(K_R)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\text{biiezione}"] & \pi_0(Y \setminus H_M) \arrow[r, "\beta"] & \pi_0(Y \setminus f(K_N)) \arrow[r, "\gamma"] & \pi_0(Y \setminus H_m) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(Y \setminus f(K_R)) \arrow[r, "\alpha"] & \pi_0(Y \setminus H_M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\text{biiezione}"'] & \pi_0(Y \setminus f(K_N)) \arrow[r, "\gamma"] & \pi_0(Y \setminus H_M)
\end{tikzcd}$$

Segue (era un suggerimento) che α, β, γ sono tutte biiezioni, è assurdo perché $\pi_0(Y \setminus f(K_R))$ ha $t+1$ elementi e $\pi_0(Y \setminus H_M)$ ha $s+1$ elementi. Assurdo, quindi f non esiste.

Rivestimenti

Esempio: $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi m t), \sin(2\pi m t))$$

Definizione: Sia $f : X \to Y$ appl. continua fra spazi topologici. L'appl. f si dice omeomorfismo locale se $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno aperto di x e V intorno aperto di $f(x)$ in Y tali che $f(U) = V$ e $f|_U : U \to V$ è un omeomorfismo.

Es: 1) Ogni omeomorfismo è un omeom. locale.

Es.: 1) Ogni omeomorfismo è un omeom. locale.

2) $f: \mathbb{R} \to S^1$ di prima è un omeomorfismo locale, basta prendere come U un intervallo aperto più „corto" di 1, allora anche iniettivam. in S^1, e la sua immagine è aperta in S^1 e omeomorfa a U stesso.

Oss.: Un omeom. locale non è necessariam. suriettivo, ma l'immagine deve essere aperta, perché V della def. è aperto in Y.

Lemma: Se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo locale, allora f è aperta e le fibre sono tutte discrete.

Dim.: Sia $A \subseteq X$ aperto. Consideriamo gli aperti U della definizione, tutti insieme; chiamiamoli U_i con $i \in I$. Abb.:

$$A = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$$

Inoltre $A \cap U_i$ è aperto in U_i, quindi $f(A \cap U_i)$ è aperto in $f(U_i) = V_i$ che è aperto in Y. Allora

$$f(A) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f(A \cap U_i)}_{\text{aperti in } Y},$$ quindi $f(A)$ è aperto in Y.

Sia ora $y \in Y$, dimostriamo che $f^{-1}(y)$ ha topologia discreta, Sia ora $y \in Y$, dimostriamo che $f^{-1}(y)$ ha topologia discreta, dimostrando che i suoi singoli punti sono aperti in $f^{-1}(y)$. Sia $x \in f^{-1}(y)$ e sia U come nella definizione. Allora $f(U) = V$ contiene y, e $f|_U : U \to V$ è biiettiva, per cui $f^{-1}(y) \cap U$ contiene solo x, e quindi $\{x\}$ è aperto in $f^{-1}(y)$.

$\square$

<u>Definizione:</u> Sia $p : E \to X$ un'applicazione continua fra spazi topologici.

Supponiamo X connesso, e supponiamo che $\forall x \in X$ esista un aperto $V \ni x$ tale che $p^{-1}(V)$ è unione disgiunta di aperti di E: $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ tali che $p|_{U_i} : U_i \to V$ è un omeomorfismo. In tal caso p si dice un <u>rivestimento</u>, lo spazio X si dice <u>base</u> (del rivestimento), lo spazio E si dice <u>spazio totale</u> (del rivestim.), e gli aperti V si dicono <u>aperti banalizzanti</u>.

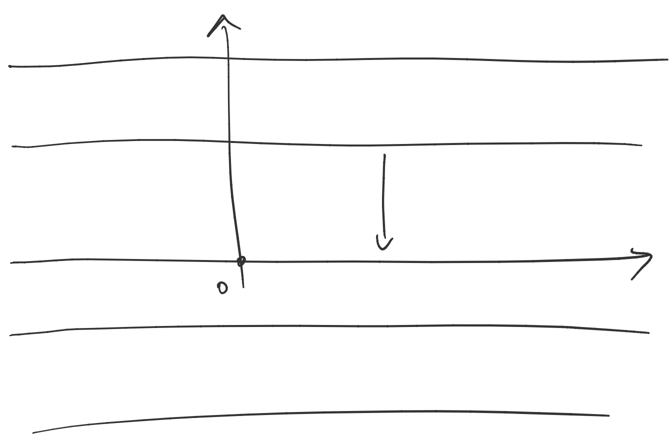
Se anche E è connesso allora p si dice <u>connesso</u>.

Se è possibile prendere $V = X$ allora p si dice banale.

Se è possibile prendere $V = X$ allora p si dice <u>banale</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Ogni omeomorfismo è un rivestimento banale.

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} = E$ $(\subseteq \mathbb{R}^2)$, $X = \mathbb{R}$, $p =$ proiezione sulla 1° coordinata



p è un rivestimento banale

3) $f : \mathbb{R} \to S^1$ di prima è un rivestimento <u>non banale</u>

non è banale perché $\mathbb{R}$ non è unione di aperti ciascuno omeomorfo ad S^1 (ad es., perché S^1 è compatto e gli aperti non vuoti di $\mathbb{R}$ non lo sono).

4) Vediamo un omeom. locale che non è un rivestimento.

Sia $g :]-5, 5[\longrightarrow S^1$ la restrizione di f di prima.

E' facile vedere che è un omeom. locale, ma non è un rivestim.

È facile vedere che è un omeom. locale, ma non è un rivestim.

perché abb. $(1,0) = g(-4) = g(-3) = \ldots = g(4)$

dato $\varepsilon > 0$ piccolo, $g\big|_{]-\varepsilon,\varepsilon[} : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ (V = l'immagine)

è un omeomorfismo, però

$$g^{-1}(V) = \underbrace{]-5, -5+\varepsilon[}_{} \cup \ldots \cup \underbrace{]5-\varepsilon, 5[}_{}$$

vanno omeom. su V tramite g

Sono omeomorfi a V, ma g non è omeomorfismo da $]-5,-5+\varepsilon[$ a V !

Quindi g non è un rivestimento.

Proposizione: Sia $p: E \to X$ rivestimento. Allora:

1) p è un omeomorfismo locale.

2) $\forall x, y \in X: \quad |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$.

Dim.: 1) Sia V aperto banalizzante in X, allora $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ è un omeom. locale, basta prendere per ogni $e \in p^{-1}(V)$ l'aperto U_i contenente e e avremo $p|_{U_i} : U_i \to V$ omeomorfismo. Visto che gli insiemi $p^{-1}(V)$ ricoprono E al variare di V, abb. p è omeomorfismo locale.

2) Sia $x_0 \in X$, scegliamo V aperto banalizzante contenente x_0, e scegliamo aperti $U_i \subseteq E$ tali che $p|_{U_i} : U_i \to V$ omeomorfismo, l'indice i varia in un insieme I_{x_0}.

Segue: $|p^{-1}(x_0)| = |I_{x_0}|$, allora tutti i punti di V hanno fibre con la stessa cardinalità.

Possiamo ripetere il ragionam. per ogni punto, e segue che

$$A = \{ x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)| \}$$ è aperto non vuoto in X.

Per lo stesso motivo, anche $X \setminus A$ è aperto. Segue: $A = X$ perché X è connesso.

$\square$

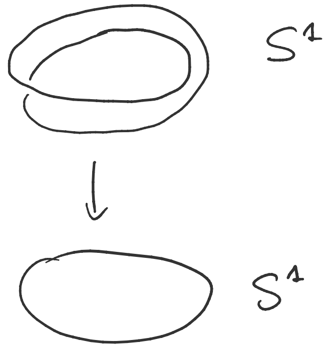
perché X è connesso. $\square$

Def.: Sia $p: E \to X$ rivestimento. Se $|p^{-1}(x)|$ è finito $\forall x \in X$ (equivalentem. per un $x \in X$) allora poniamo $|p^{-1}(x)| = d$ e si dice che p ha *grado* d.

Es.: 1) $f: \mathbb{R} \to S^1$ di prima non ha grado finito

2) $S^1 \longrightarrow S^1$

$$(\cos(2\pi m t), \sin(2\pi m t)) \longmapsto (\cos(4\pi m t), \sin(4\pi m t))$$ è ben



definita, la si può vedere anche come

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
$$z \longmapsto z^2 .$$

Quozienti per azioni propriamente discontinue

Def.: Sia $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ un sottogruppo di $\mathrm{Omeo}(E) = \{f: E \to E$ omeomorfismo$\}$. Si dice che G agisce in modo propriamente discontinuo omeomorfismo $\}$. Si dice che G agisce in modo <u>propriamente discontinuo</u> se $\forall e \in E\ \exists U$ intorno aperto di e in E tale che

$$g(U) \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G, \text{ con } g \neq Id_E.$$

<u>Esempi</u>: 1) $\mathbb{Z} \cong G$ che agisce su $\mathbb{R} = E$ traslando per $n \in \mathbb{Z}$

cioè $\quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+n$. Si tratta di un sottogruppo di $Omeo(\mathbb{R})$.

E' un'azione propriam. discontinua, basta prendere per $r \in \mathbb{R}$ l'intorno $U = \left] r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2} \right[$.

2) Sia $E = \mathbb{R}$ con $G = \{ Id_{\mathbb{R}},\ s : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x \}$.

Non è un'azione propriam. discontinua, perché attorno a 0 non esiste alcun aperto U come nella definizione.

<u>Teorema</u>: Sia E spazio topologico, $G \subseteq Omeo(E)$ che agisce in modo propriam. discontinuo, e consid. $X = E/G$.

Se E/G è connesso allora il quoziente $p : E \to E/G$

è un rivestimento.

<u>Dim.:</u> Sappiamo che p è aperta. Sia $x \in E/G$, consid. U aperto come nella def. precedente tale che $p(U) \ni x$.

Sappiamo: $p(U) = V$ è aperto in X, e

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

Oss.: se $g, h \in G$ sono distinti allora

$$g(U) \cap h(U) = h\Big(\underbrace{(h^{-1} \circ g)(U) \cap U}_{\text{vuoto perché } h \neq g}\Big) = \emptyset$$

Cioè i $g(U)$ sono aperti di X, disgiunti due a due,

e vale:

$$p|_U : U \longrightarrow p(U) = V \qquad \text{è continua, aperta, biiettiva,}$$

cioè è un omeomorfismo. Allora anche

$P|_{g(U)} : g(U) \to V$ è un omeomorfismo, perché

$$P|_{g(U)} = P|_U \circ g^{-1}|_{g(U)} \qquad \left(g^{-1}|_{g(U)} : g(U) \to U \right)$$

è composizione di omeom. $\square$