Geometria 2, Lezione 20

Thursday, 6 May 2021 09:16

Teorema di Seifert - Van Kampen

Esempio: Calcoleremo il gruppo fondam. di S^n con $n \geq 2$:

vedremo che $\pi_1(S^n) =$ banale

Intuitivamente:

$n = 2$

Se abbiamo $[\alpha] \in \pi_1(S^2, a)$ con $\alpha([0,1]) \subsetneq S^2$, allora possiamo scegliere $b \in S^2 \setminus \alpha([0,1])$ e allora α è tutto contenuto in $S^2 \setminus \{b\}$ che è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, contraibile. Allora sicuramente $\alpha \sim 1_a$, cioè $[\alpha] = e_{\pi_1(S^2, a)}$. Questo ragionamento però non si può applicare a cammini $[0,1] \to S^2$ suriettivi (esistono!).

Useremo allora:

Teorema (prima parte del teo. di Seifert-Van Kampen):

<u>Teorema</u> (prima parte del teo. di Seifert-Van Kampen):

Sia X spazio topologico, siano $A, B \subseteq X$ aperti, con $A \cup B = X$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Scegliamo $a \in A \cap B$, e consideriamo $f : A \to X$ e $g : B \to X$ le inclusioni, e gli omomorfismi $f_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ e $g_* : \pi_1(B, a) \to \pi_1(X, a)$.

Se $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi, allora le immagini $f_*(\pi_1(A, a))$ e $g_*(\pi_1(B, a))$ <u>generano</u> $\pi_1(X, a)$.

<u>Es.</u>: Si potrebbe tentare di usare il teorema per calcolare $\pi_1(S^1)$, ad es. usando $A = S^1 \setminus \{(0,1)\}$ e $B = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$, allora $\pi_1(A)$ e $\pi_1(B)$ sono banali. Ma $A \cap B$ non è connesso per archi.

Per la dim., usiamo:

<u>Teorema</u> (del numero di Lebesgue): Sia (Y, d) uno spazio

Teorema (del numero di Lebesgue).

metrico compatto e $f: Y \longrightarrow X$ continua, con X spazio topologico. Sia $\mathcal{R}$ ricoprimento aperto di X, allora esiste $\delta > 0$ tale che $\forall y \in Y \ \exists A \in \mathcal{R} \mid f(B(y,\delta)) \subseteq A$.

Dim.: Sapp. che $f(Y)$ è compatto e quindi esiste un numero finito di elem. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ tali che

$$f(Y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n .$$

Consid.
$$g: Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \max \{ d(y, Y \setminus f^{-1}(A_1)), \dots \dots d(y, Y \setminus f^{-1}(A_n)) \}.$$

Abb.: g è continua, inoltre $g(y) \neq 0 \ \ \forall y \in Y$

perchè se (per assurdo) avessi $g(y) = 0$ allora y apparterrebbe al chiuso $Y \setminus f^{-1}(A_i) \ \ \forall i$, e allora avrei $f(y) \notin A_i \ \ \forall i$, assurdo.

D'altronde g ha un minimo su Y per compattezza, e sia

$$\delta = \min_{y \in Y} g(y) .$$

Allora per ogni $y \in Y$ abb. $g(y) \geq \delta$, cioè esiste i tale che $d(y, Y \setminus f^{-1}(A_i)) \geq \delta$. Segue che $B(y, \delta)$ è contenuta in $f^{-1}(A_i)$, cioè $f(B(y,\delta)) \subseteq A_i$.

$\square$

<u>Corollario:</u> Sia $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua con X sp topologico. Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di X, allora esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ $\exists A_i \in \mathcal{R}$ tale che $\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq A_i$.

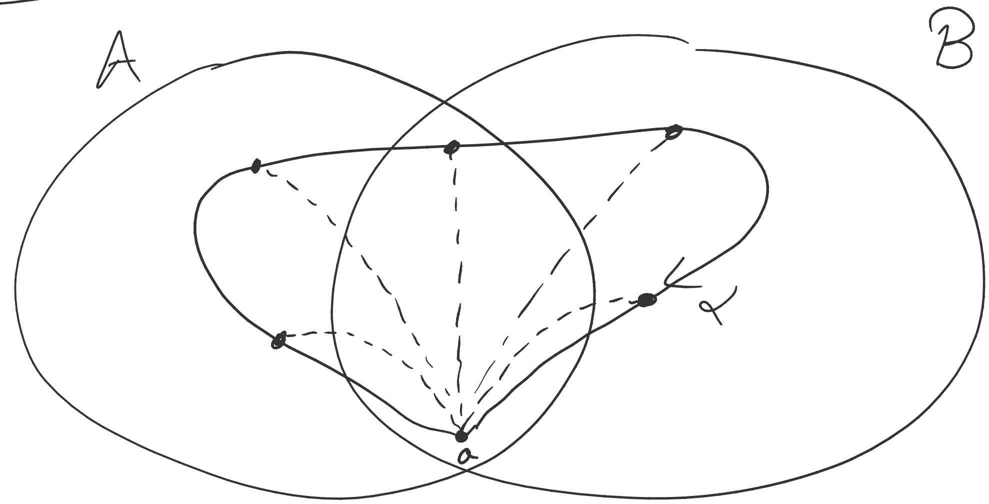
<u>Dim.:</u> Usiamo il teo. del numero di Lebesgue con $Y = [0,1]$, sia δ come nel teorema, e n tale che $\frac{1}{n} < \delta$. Allora

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq \alpha\left(B\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}, \delta\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per il teorema.}}}{\subseteq} A_i$$

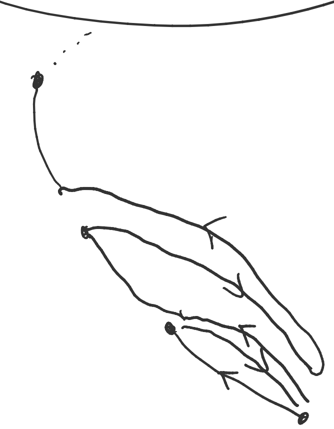
$\square$

<u>Dim. del teorema di S.-V.K.</u>

Idea:



cammino omotopo ad α:



Sia $\alpha \in \Omega(X, a, a)$, dimostriamo che esistono $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tali che $\alpha \sim \gamma_1 * \dots * \gamma_n$ e

$$\gamma_i \in \begin{cases} \Omega(A, a, a) & \text{opp.} \\ \Omega(B, a, a) \end{cases}$$

Sia n come nel corollario, cioè tale che

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq \begin{cases} A & \text{opp.} \\ B \end{cases} \qquad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

$\ldots \; B$

Denotiamo $x_i = \alpha\left(\frac{i}{n}\right)$ $\quad \left(x_0 = a, \; x_1 = \alpha\left(\frac{1}{n}\right), \ldots\right)$,

e definiamo $\alpha_i : [0,1] \to X$ come

$$\alpha_i(t) = \alpha\left(\frac{i-1+t}{n}\right)$$

cioè α_i percorre il tratto di α che va da x_{i-1} a x_i.

Ora $\forall i$ scegliamo β_i un cammino da x_i a a, cioè $\beta_i \in \Omega(X, x_i, a)$, tale che:

1) Se $x_i \in A$ allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, a)$.
2) Se $x_i \in B$ allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, a)$.
3) Se $x_i \in A \cap B$ allora $\beta_i \in \Omega(A \cap B, x_i, a)$.

E' possibile perché $A \cap B$, A, B sono connessi per archi.

ConsidLeriamo allora:

$$(\alpha_1 * \beta_1) * \left(i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2\right) * \left(i(\beta_2) * \alpha_3 * \beta_3\right) * \ldots * \left(i(\beta_{n-1}) * \alpha_n\right)$$

evidentemente è un cammino omotopo ad α. D'altronde ponendo

$$\gamma_1 = \alpha_1 * \beta_1, \quad \gamma_2 = \left(i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2\right), \ldots, \quad \gamma_n = \left(i(\beta_{n-1}) * \alpha_n\right)$$

abb. $\gamma_i \in \begin{cases} \Omega(A, a, a) & \text{opp.} \\ \Omega(B, a, a) \end{cases}$. Oss.: abbiamo usato effettivam. che $A \cap B$ è connesso per archi, per essere sicuri che γ_i abbia questa proprietà.

Segue: ogni elem. di $\pi_1(X, a)$ è prodotto di elem. $[\gamma_1] \cdots [\gamma_n]$ tali che γ_i „viene" da A o da B, cioè $[\gamma_i] \in f_*(\pi_1(A,a))$ opp. $g_*(\pi_1(B,a))$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Siano A, B come nel teorema di S.-V.K., e siano A, B semplicemente connessi. Allora X è semplicemente connesso.

<u>Dim.</u>: Se $\pi_1(A, a)$ e $\pi_1(B, a)$ sono banali allora lo è anche $\pi_1(X, a)$.

$\square$

Corollario: S^n è semplicem. conn. per $n \geq 2$.

Corollario: S^n è semplicem. conn. per $n \geq 2$.

Dim.: Usiamo il corollario con $S^n = A \cup B$ con $A = S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ e $B = S^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\}$. Allora A e B sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$, quindi semplicemente connessi. Invece $A \cap B$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}$, che è connesso per archi se $n \geq 2$.

$\square$

Esercizio per casa: Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus Y$ è semplicem. connesso se $n \geq 3$ e Y è finito. (Suggerimento: usare il teorema di S.-V.K. e induzione su $|Y|$.)

Corollario: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 0$.

Dim.: Per induzione su n, oss.: $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}} = \{\text{un punto}\}$ quindi è semplicemente connesso.

Passo induttivo: Siano $z_0, \dots, z_n$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, consid. $H = \{z_0 = 0\}$. Abb.: H è omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}$ tramite $[0, z_1, \dots, z_n] \longmapsto [z_1, \dots, z_n]$.

$\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ tramite $[0, z_1, \dots, z_n] \longmapsto [z_1, \dots, z_n]$.

(Esercizio: Verificare che si tratta di appl. continue, usando la def. di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ come quoziente topologico di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e la proprietà di passaggio al quoziente di appl. continue costanti sulle classi di equivalenza.)

Per induzione: H è semplicemente connesso. Definiamo

$A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus H$ (esercizio: verificare che A è aperto)

$B = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\}$ (——— , — B —)

Abb.: A è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow A \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto [1, z_1, \dots, z_n] \\ \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right) &\longleftarrow\!\shortmid [z_0, z_1, \dots, z_n] \end{aligned}$$

Quindi A è semplicem. connesso. Allora $A \cap B$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, che è connesso per archi.

Infine H è retratto per deformazione di B:

$$R : B \times [0,1] \longrightarrow B$$

$$([z_0, \dots, z_n], t) \longmapsto [t z_0, z_1, \dots, z_n]$$

Allora anche B è semplicem. connesso, per cui $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è sempl. connesso. $\square$

<u>Oss.</u>: La stessa dimostrazione si potrebbe riprodurre in parte, ottenendo che $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})$ è generato dall'immagine di $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ vedendo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

<u>Esempio</u>: Consid. $X = S^1$. Vedremo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

↑ con l'addizione.

Definiamo un omomorfismo:

$$n \longmapsto \alpha_n : [0,1] \to S^1 (\subseteq \mathbb{R}^2)$$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t))$$

Allora $i(\alpha_n) = \alpha_{-n}$, $\alpha_0 = 1_a$ $(a = (1,0))$

e $\qquad \alpha_n * \alpha_m \sim \alpha_{n+m}$ si verifica facilmente

(se $n, m > 0$ sono proprio lo stesso cammino a meno di riparametrizzazione).

Quindi $n \longmapsto [\alpha_n]$ definisce un omomorfismo $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, a)$.

Dimostreremo che è un isomorfismo.