Geometria 2, Lezione 2

Monday, 1 March 2021 08:55

Topologia generale

Def.: Sia X un insieme. Sia $\mathcal{T}$ una famiglia di sottoins di X. Allora $\mathcal{T}$ si dice topologia se:

A1) $\emptyset$ e X sono elem. di $\mathcal{T}$

A2) l'unione di una famiglia qualsiasi $^{(*)}$ di elt di $\mathcal{T}$ è un elem. di $\mathcal{T}$

A3) l'intersezione di due elem. di $\mathcal{T}$ è un elem. di $\mathcal{T}$.

(*) "qualsiasi" = finita o infinita, o anche vuota

l'unione di una famiglia vuota di insiemi è $\emptyset$.

Se $\mathcal{T}$ è una topologia, i suoi elementi si dicono aperti, e la coppia $(X, \mathcal{T})$ si dicono <u>aperti</u>, e la coppia $(X, \mathcal{T})$ si dice <u>spazio topologico</u> (o semplicem. X).

<u>Oss</u>: L'assioma A3 è equivalente a richiedere che A3') intersezioni di un numero <u>finito</u> di elem. di $\mathcal{T}$ è un elem. di $\mathcal{T}$.

Infatti

$$A3') \Longrightarrow A3) \quad \underline{\text{ovvio}}$$

$$A3) \Longrightarrow A3') \quad \text{perché}$$

$$\underbrace{A_1}_{\text{aperti}} \cap \dots \cap \underbrace{A_n}_{\text{aperti}} = \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}_{\substack{\text{aperto per} \\ \text{induzione}}} \cap A_n$$

Attenzione alla terminologia:

intervallo <u>aperto</u> = nozione usuale

aperto = elemento della topologia

aperto — elemento della topologia che stiamo considerando

Esempi: 1) Ogni insieme X ammette le seguenti topologie:

$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ è una topologia, si dice <u>banale</u> o indiscreta

oppure $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ topologia <u>discreta</u>

insieme delle parti

2) $X = \mathbb{R}$ $\mathcal{T} =$ topologia <u>euclidea</u>

E' la topologia in cui gli aperti sono definiti come nella lez. 1.

Si può definire anche in questo modo.

$A \in \mathcal{T}$ se e solo se A è unione qualsiasi di intervalli aperti

A1) ok

A2) ok

A3) Siano $A, B \in \mathcal{T}$ cioè sono del

A3) Siano $A, B \in \mathcal{T}$, cioè per def.

$$A = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[\qquad B = \bigcup_{h\in H}]c_h, d_h[$$

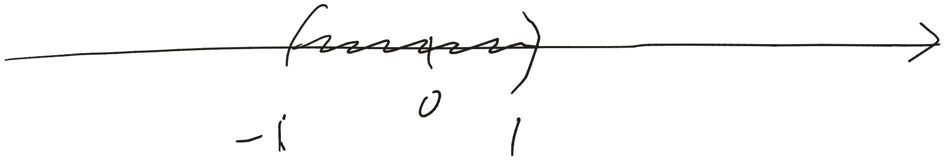
$$A \cap B = \Big(\qquad \Big) \cap \Big(\qquad \Big) =$$

$$= \bigcup_{\substack{i\in I,\\ h\in H}} \Big(\underbrace{]a_i, b_i[\cap]c_h, d_h[}_{\|} \Big)$$

$\emptyset$ oppure $]\max\{a_i, c_h\}, \min\{b_i, d_h\}[$

quindi anche $A \cap B$ è in $\mathcal{T}$.

3) $X = \mathbb{R}$ definiamo $\mathcal{T}$ dicendo che A è aperto (per $\mathcal{T}$) se è aperto in topologia euclidea e contiene $0 \in \mathbb{R}$ se non è vuoto



$]-1, 1[$ è aperto in $\mathcal{T}$, ma $]2, 3[$ no

$]-1,1[$ è aperto in $\mathcal{T}$, ma $]2,3[$ no

neppure $]0,a[$ con $a>0$ è aperto in $\mathcal{T}$.

Oss.: se $p \neq 0$, allora esiste un aperto che contiene 0 e non p, ad es. $]\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}[$ opp. $]\frac{p}{2}, \frac{-p}{2}[$

però non esiste alcun aperto che contiene p e non 0.

Def.: Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico. $C \subseteq X$ si dice chiuso se $X \setminus C$ è aperto.

I chiusi soddisfano:

C1) $X, \emptyset$ sono chiusi

C2) l'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è chiusa.

C3) l'unione di due chiusi è chiusa.

Esempio: Sia X un insieme, la topologia cofinita è definita come la topologia in cui C è chiuso è definita come la topologia in cui C è chiuso se $C = X$ oppure C è finito.

Ad es.: se $X = \mathbb{R}$ e $C \subsetneq X$ è chiuso in top. cofinita, C è un insieme finito, quindi è chiuso anche in topologia euclidea.

Qui se $\underset{\mathbb{R}}{p \neq q}$ (con $p, q \in \mathbb{R}$) allora esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto che contiene p e non q $(A = \mathbb{R} \setminus \{q\})$.

Però non esistono aperti <u>disgiunti</u>, uno contenente p e l'altro q.

<u>Def.</u>: Sia $(X, \mathcal{T})$ uno sp. topologico.

Una sottofamiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ si dice <u>base</u> di $\mathcal{T}$ se ogni aperto di $\mathcal{T}$ è unione di elem. di $\mathcal{B}$.

<u>Oss.</u>: Qui "unione" può essere arbitraria, anche vuota.

<u>Esempio</u>: Gli intervalli aperti sono una base della top.

__Esempio:__ Gli intervalli aperti sono una base della top. euclidea su $\mathbb{R}$.

__Oss.:__ Una base di $\mathcal{T}$ __determina__ $\mathcal{T}$.

__Teorema:__ Sia X un insieme, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Esiste una topologia $\mathcal{T}$ che ammette $\mathcal{B}$ come base se e solo se

1) $$X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$$

2) Per ogni $A, C \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in A \cap C$ esiste $D \in \mathcal{B}$ tale che $x \in D$ e $D \subseteq A \cap C$.

__Dim:__ $\Rightarrow$ Se $\mathcal{T}$ esiste, verifichiamo 1) e 2).

1) vale perché $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$ e X è aperto.

2)

$\wedge$ è aperto.

2) vale perché A e C sono aperti, quindi $A \cap C$ è aperto, quindi è unione di elem. di $\mathcal{B}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\mathcal{B}$ che soddisfa 1) e 2), definiamo $\mathcal{T} = \{$unioni qualsiasi di elem. di $\mathcal{B}\}$

Verifichiamo che $\mathcal{T}$ è una topologia:

A1) $\emptyset$ = unione vuota di el. di $\mathcal{B}$ $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$

$$X \underset{1)}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \Rightarrow X \in \mathcal{T}$$

A2) ok: unioni qualsiasi di unioni qualsiasi di elem. di $\mathcal{B}$ sono in $\mathcal{T}$.

A3) Siano $A, C \in \mathcal{T}$, cioè

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \text{dove } A_i, C_j \in \mathcal{B}$$

$$C = \bigcup_{j \in J} C_j$$

$$C = \bigcup_{j \in J} C_j$$

$$A \cap C = \bigcup_{\substack{i \in I, \\ j \in J}} \underbrace{A_i \cap C_j}$$

unione di elem. di $\mathcal{B}$ per la propr. 2).

quindi $A \cap C \in \mathcal{T}$.

$\square$

<u>Def.</u>: Siano $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ due topologie su un ins. X. Se $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{R}$ allora $\mathcal{T}$ si dice più <u>fine</u> di $\mathcal{R}$.

<u>Es.</u>: la topologia cofinita è meno fine della top. euclidea su $\mathbb{R}$.

<u>Oss.</u>: Se abbiamo diverse topologie su un insieme X allora l'unione delle topologie non è necessariam una topologia, ma <u>l'intersezione delle topologie è una topologia</u>.

Talvolta potremo definire allora una topologia dicendo che è la <u>meno fine</u> che soddisfa certe proprietà, intendendo che consideriamo <u>tutte</u> le topologie con quelle proprietà, e le intersechiamo.

<u>Esempio</u>: Sia $\mathbb{K}$ un campo (ad es. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, opp. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$); sia $n>0$ un intero, definiamo la <u>topologia di Zariski</u> su $\mathbb{K}^n$.

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ = anello dei polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$ e indeterminate $x_1, \dots x_n$.

dato $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (es. $f = x_1^2 + x_2^2 - 1$)

definiamo
$$D(f) = \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \}$$

Abb.: $D(1) = \mathbb{K}^n$
$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D(f\cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

Segue dal teorema: $\{D(f) \mid f \in \mathbb{K}[x_1,..,x_n]\}$ è base di una topologia, detta di Zariski, su $\mathbb{K}^n$.

Def. anche: per f come prima

$$V(f) = \mathbb{K}^n \setminus D(f).$$

E' un chiuso in top. di Zariski, ma più in generale i chiusi della top. di Z sono intersezioni di sottoinsiemi così:

dato $E \subseteq \mathbb{K}[x_1,..,x_n]$ allora def.

$$V(E) = \bigcap_{f\in E} V(f) = \{(a_1,..,a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1,..,a_n)=0 \text{ per ogni } f \in E\}$$

Ogni chiuso di Zariski è di questo tipo.

Esercizio: Sia E come prima, e sia $I = (E)$ l'ideale generato da E in $\mathbb{K}[x_1,..,x_n]$.
Allora $V(I) = V(E)$.

Allora $\check{V}(I) = V(E)$.
(dimostrare)

<u>Oss.:</u> La top. di Zariski su $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ è la topologia cofinita, perché gli zeri simultanei di polinomi in 1 variabile sono $\emptyset$, $\mathbb{K}$, oppure un insieme finito.