Proposizione: Siano X, Y spazi topologici, $a \in X$, $b \in Y$.

Allora $\pi_1(X \times Y, (a,b))$ è isomorfo a

$$\underbrace{\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)}_{\text{prodotto di gruppi}}.$$

Dim.: Ogni cammino $\alpha : [0,1] \to X \times Y$ è univocam. determinato dalle sue componenti $\alpha_1 : [0,1] \to X$ e $\alpha_2 : [0,1] \to Y$ dove $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, viceversa dati cammini α_1, α_2 allora α è definito. Questo induce una biiezione

$$\begin{aligned} \Omega(X \times Y, (a,b), (a,b)) &\longrightarrow \Omega(X, a, a) \times \Omega(Y, b, b) \\ \alpha &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Lo stesso vale per le omotopie di cammino $F : [0,1] \times [0,1] \to X \times Y$, quindi la biiezione passa ai quozienti

$$\begin{aligned} \pi_1(X \times Y, (a,b)) &\longrightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b) \\ [\alpha] &\longmapsto ([\alpha_1], [\alpha_2]) \end{aligned}$$

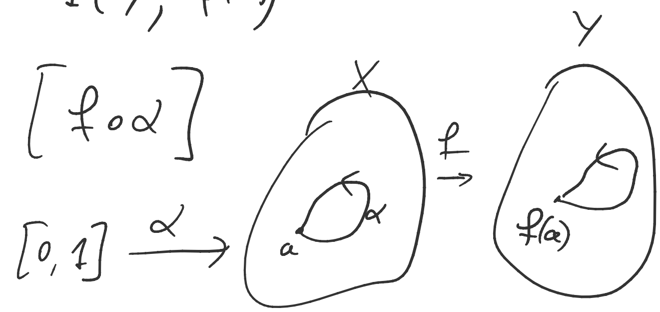
Si verifica facilmente che si tratta di un omomorfismo biiettivo di

Si verifica facilmente che si tratta di un omomorfismo biiettivo di gruppi, cioè un isomorfismo.

$\square$

Proprietà funtoriali

Sia $f: X \to Y$ appl. continua fra spazi topologici. Dato $a \in X$, è definita l'applicazione
$$f_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$$
$$[\alpha] \longrightarrow [f \circ \alpha]$$



Per quanto già visto, f_* è un omomorfismo di gruppi.

Es.: Se prendo $Id_X : X \to X$, allora $(Id_X)_*$ è l'identità su $\pi_1(X,a)$.

Se invece considero $f: X \to X$ costante ($f(x) = c$ fissato, $\forall x \in X$) allora $f_*: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(X, \underset{c}{\overset{\shortparallel}{f(a)}})$ è l'omomorfismo banale, che manda ogni elem. nell'elem. neutro.

Lemma: Sia X uno sp. topologico, $A \subseteq X$, $a \in A$. Consideriamo l'inclusione $\iota: A \to X$, e l'omom. $\iota_*: \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$.

1) Se A è retratto di X, allora ι_* è iniettivo.

2) Se A è retratto per deformazione, allora ι_* è un isomorfismo.

<u>Dim.</u>: 1) Sia $\alpha \in \Omega(A, a, a)$ tale che $\iota_*([\alpha]) = e_{\pi_1(X,a)}$

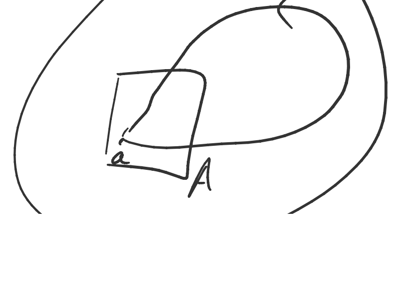
elem. neutro del gruppo

Cioè esiste un'omotopia di cammini $F: [0,1]\times[0,1] \to \underline{X}$ da α a 1_a. Sia ora $R: X \to A$ retrazione. Allora $R \circ F$ è un'omotopia di cammini in A dallo stesso α ad 1_a. Cioè α è omotopo a 1_a anche in A, cioè $[\alpha]$ è banale anche in $\pi_1(A, a)$, quindi ι_* è iniettiva.

2) Sia ora A retratto per deformazione di X. Sia $D: X \times [0,1] \longrightarrow X$ deformazione di X su A.

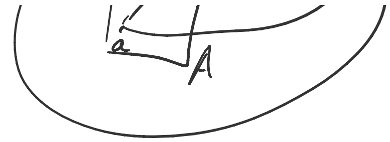
In particolare ι_* è iniettiva perché A è un retratto. Dobb. dim. che ι_* è <u>suriettiva</u>.

Sia $\beta \in \Omega(X, a, a)$, definiamo



$F: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ come

$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ come



$F(t,s) = D\big(\beta(t), s\big)$.

Abb. $F(-,1) = \beta(-)$, $F(-,0) = \beta'(-)$ con

$\beta' : [0,1] \longrightarrow A$ continua, e F è omotopia di cammini

da β' a β (<u>oss.</u>: F mantiene fissi i punti iniziali e finali

dei cammini perché D è l'identità su A per ogni valore di s).

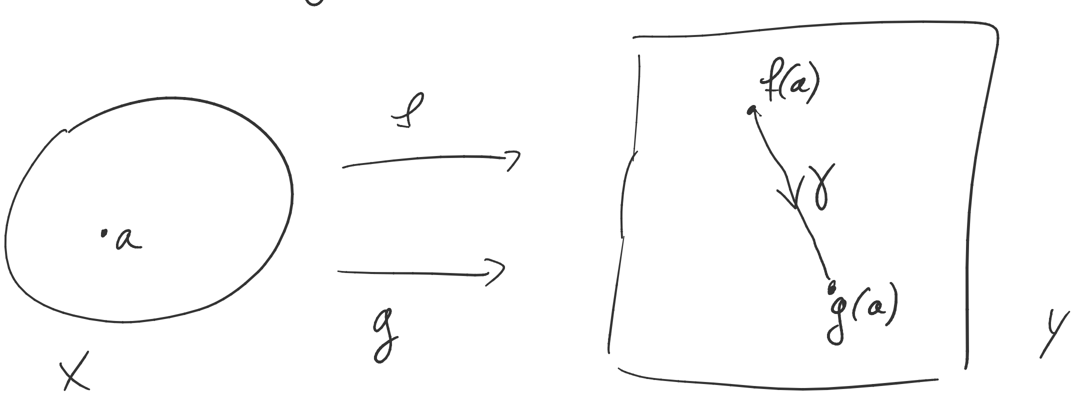
D'altronde $[\beta'] \in \iota_*(\pi_1(A,a))$ e $[\beta] = [\beta']$ in $\pi_1(X,a)$,

cioè ι_* è suriettiva. $\square$

<u>Proposizione</u>: Siano $f, g : X \to Y$ appl. continue fra spazi topologici.

Supponiamo siano omotope, e sia $F : X \times [0,1] \to Y$ un'omotopia da f a g. Sia $a \in X$, e sia $\gamma : [0,1] \to Y$ def. come

$\gamma(t) = F(a,t)$.



Consid.

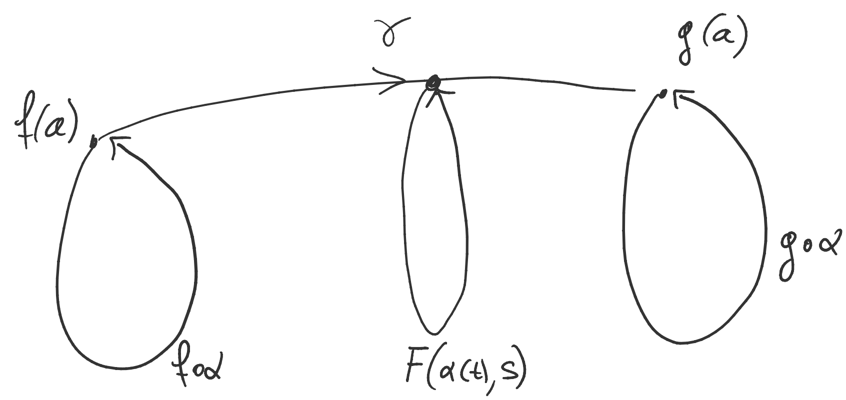
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,a) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(a)) \arrow[d, "\gamma_\#"] \\
& \pi_1(Y, g(a))
\end{tikzcd}$$

Allora il diagramma è commutativo, cioè $g_* = \gamma_\# \circ f_*$.

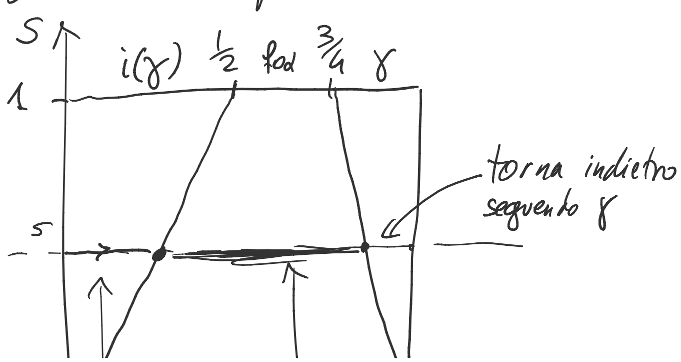
<u>Dim.:</u> Consid. $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$. Abb.:

$$g_*([\alpha]) = [g \circ \alpha] \qquad (\gamma_\# \circ f_*)([\alpha]) = [i(\gamma) * (f\circ\alpha) * \gamma]$$

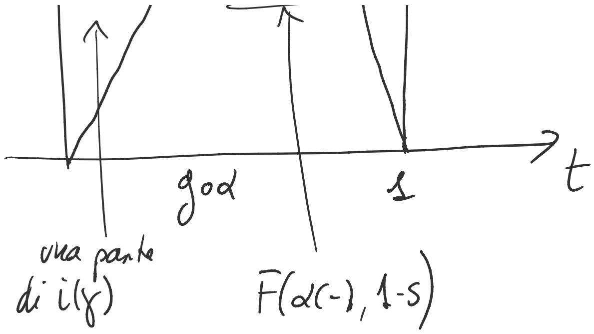
in Y:



Diamo un'omotopia di cammini esplicita da $g\circ\alpha$ a $i(\gamma) * ((f\circ\alpha) * \gamma)$:



$$G(t,s) = \begin{cases} (i(\gamma))(2t) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}s] \\ F\left(\alpha\left(\frac{4t-2s}{4-3s}\right), 1-s\right) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}s, 1-\frac{1}{4}s] \end{cases}$$



$F\left(\alpha\left(\frac{[illegible]}{4-3s}\right), 1-s\right)$ per $t \in \left[\frac{1}{2}s, 1-\frac{1}{4}s\right]$

$\gamma(4t-3)$ per $t \in \left[1-\frac{1}{4}s, 1\right]$

per $t = \frac{1}{2}s$ fa zero, per $t = 1-\frac{1}{4}s$ fa 1

Esercizio: verificare che G è continua ed è un'omotopia di cammini da $g \circ \alpha$ a $i(\gamma) * ((f \circ \alpha) * \gamma)$. $\square$

<u>Corollario</u>: Sia $g : X \to X$ appl. continua e omotopa all'identità. Dato $a \in X$, abb. $g_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, g(a))$ è un isomorfismo.

<u>Dim.</u>: Applichiamo la proposiz. con $X = Y$, $f = Id_X$, e $\gamma_\#$ come nella prop:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X, a) \arrow[d, "\gamma_\#"] \\
\pi_1(X, a) \arrow[ur, "(Id_X)_*"] \arrow[r, "g_*"'] & \pi_1(X, g(a))
\end{tikzcd}$$

Segue $g_* = \gamma_\# \circ (Id_X)_*$, e sappiamo: $(Id_X)_*$ è l'identità su $\pi_1(X, a)$, e $\gamma_\#$ è un isomorfismo, per cui anche g_* è su $\pi_1(X, a)$, e $\gamma_\#$ è un isomorfismo, per cui anche g_* è un isom..

$\square$

<u>Teorema:</u> Siano X, Y spazi topologici e $f: X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Dato $a \in X$, l'applicazione
$f_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$ è un <u>isomorfismo</u>.

<u>Dim.:</u> Sia $g: Y \to X$ „inversa omotopica", cioè g è continua e $g \circ f$ è omotopa a Id_X, e $f \circ g$ è omotopa a Id_Y.

Abb.:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, a) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "g_* \circ f_* = (g \circ f)_*"'] & \pi_1(Y, f(a)) \arrow[r, "g_*"] \arrow[rr, bend left, "f_* \circ g_* = (f \circ g)_*"] & \pi_1(X, g(f(a))) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, f(g(f(a))))
\end{tikzcd}$$

Per il corollario, gli omomorfismi $(g \circ f)_*$ e $(f \circ g)_*$ sono isomorfismi.

Cioè abbiamo quattro gruppi $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\eta} D$ e omomorfismi φ, ψ, η tali che $\psi \circ \varphi$ e $\eta \circ \psi$ sono isomorfismi ($\Rightarrow$ biiezioni). Come in un esercizio visto, allora sono <u>tutte</u> biiezioni,

($\Rightarrow$ biiezioni). Come in un esercizio visto, allora sono tutte biiezioni, cioè sono tutti isomorfismi.

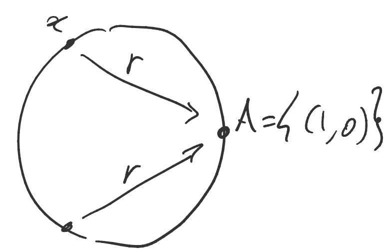
$\square$

Esempi ed esercizi

Esempio: Consid. $X = S^1$ e $A = \{(1,0)\} \subseteq S^1$.

Allora A è un retratto di X, basta prendere

$$r : X \to A, \quad x \mapsto (1,0)$$



Però A non è retratto per deformazione di X.

Consid. invece $X = D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \le 1\}$ e $A = S^1$.

Qui A non è un retratto di X.

Ma dimostrare entrambe le cose è difficile, diventa facile se si usa il gruppo fondamentale.

Esempio: $X = \{(t, tc) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1],\ c \in \mathbb{Q}\}$

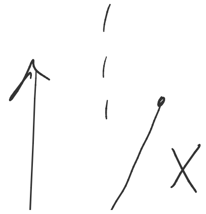
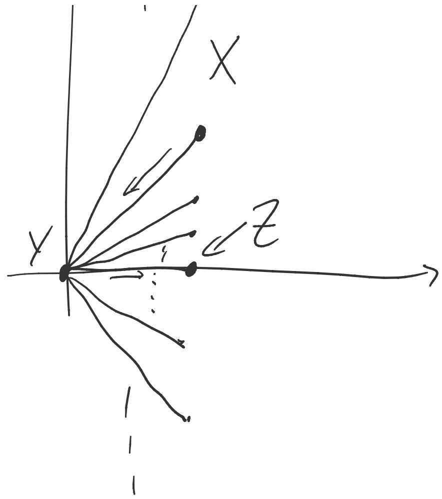


Abb.: $Y = \{(0,0)\}$ è retratto per deformaz. di X, ad es. basta prendere



di X, ad es. basta prendere

$$R(x, s) = x \cdot s \qquad (x \in X,\ s \in [0,1])$$

Invece $Z = \{(1,0)\}$ non è retratto per deformazione di X, ma questo non si riesce a dim. facilmente usando il gruppo fondamentale, perché

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) = \text{banale}, \text{ e anche } \pi_1(Z) = \text{banale}.$$

Dimostriamo che Z non è retratto per deformazione, usando i punti

$p_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ovviam. $\lim_{n \to +\infty} p_n = (1,0)$.

Supponiamo per assurdo che esista una deformazione $R : X \times [0,1] \to Z$.

Allora $R(p_n, -)$ è un cammino da $(1,0)$ a p_n.

Esiste sicuramente almeno un valore del parametro t_n tale che

$R(p_n, t_n) = (0,0)$, infatti se t_n non esistesse allora sarebbe definita

$$\begin{aligned} [0,1] &\xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{Q} \\ t &\longmapsto \frac{\text{la } y \text{ di } R(p_n,t)}{\text{la } x \text{ di } R(p_n,t)} \end{aligned}$$

con $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{n}$; assurdo. Per cui t_n esiste $\forall n$.

con $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\frac{1}{n}$: assurdo. Per cui t_n esiste $\forall n$.

La successione $n \mapsto t_n$ ha una sottosuccessione convergente $t_{n_k} \to t_0$, e allora

$$\underbrace{R(\underset{\substack{\downarrow\\(1,0)}}{p_{n_k}}, \underset{\substack{\downarrow\\t_0}}{t_{n_k}})}_{\substack{\parallel\\(0,0)}} \longrightarrow R((1,0), t_0) = (1,0)$$

assurdo.

Esercizi per casa: 1) Sia X spazio topologico, $A \subseteq X$ retratto di X. Dimostrare che se X è di Hausdorff allora A è chiuso.

2) Siano in $\mathbb{R}^3$: $X = D^2 \times [0,1]$ (cilindro)

$A = (D^2 \times \{0\}) \cup (S^1 \times [0,1])$ (base + sup. laterale).

Dimostrare che A è retratto per deformazione di X.

Definiamo $\pi_0(X)$ dato uno sp. topologico X:

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}$$

Data $f: X \to Y$ continua, è utile talvolta considerare

$$f_*: \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

definita come $f_*(C)$ = la componente connessa per archi di Y che contiene $f(C)$.

C: una comp. connessa per archi di X

3) Usare π_0 e f_* per dimostrare la cosa seguente:

$\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{k \text{ punti}\}$

se $s \neq k$.

(Suggerimento: Scrivere $\mathbb{R}^n \setminus \{s \text{ punti}\}$ come unione dei compatti

$$K_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| \leq m \ \text{ e } \ \|x - p_i\| \geq \frac{1}{m} \ \forall i \right\}$$

dove $\{s \text{ punti}\} = \{p_1, \dots p_s\}$, e usare anche

la costruzione vista prima $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\eta} D$

)

la costruzione vista prima $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$

dove A, B, C, D sono insiemi)