Geometria 2, Lezione 18

Monday, 3 May 2021 09:11

Gruppo fondamentale

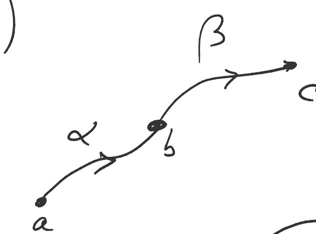
Cammino in uno spazio topologico X: applicaz. continua $\alpha : [0,1] \to X$

$\alpha(0) =$ „punto iniziale", $\alpha(1) =$ „punto finale". Il cammino α si dice **chiuso** se $\alpha(0) = \alpha(1)$, e il punto $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$ si chiama **punto base**.

Definizione: 1) Sia X spazio topologico, e $a, b \in X$. Denotiamo con

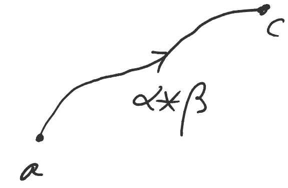
$$\Omega(X, a, b) = \left\{ \alpha : [0,1] \to X \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ cammino con} \\ \alpha(0) = a,\ \alpha(1) = b \end{array} \right\}.$$

2) Dati $a, b, c \in X$ e $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$, si definisce la **giunzione** (o **concatenazione**)

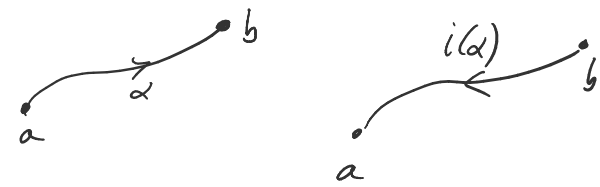


$\alpha * \beta \in \Omega(X, a, c)$ come

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



e si definisce l'**inversione** di α, denotata $i(\alpha) \in \Omega(X, b, a)$, come $\quad i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$



Oss.: Abbiamo $i(i(\alpha)) = \alpha$, $\quad i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$, che si verificano facilmente.

Definizione: Due cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ si dicono <u>omotopicamente equivalenti</u> se sono omotopi tramite un'omotopia che lascia fissi a e b per ogni valore del parametro. Cioè deve esistere $F: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ continua, tale che

si scrive $\alpha \sim \beta$

1) $F(t, 0) = \alpha(t)$, $\quad F(t,1) = \beta(t) \quad \forall t \in [0,1]$

(cioè F è omotopia da α a β)

2) $F(0, s) = a$, $\quad F(1, s) = b \qquad \forall s \in [0,1]$

Una tale F si dice <u>omotopia di cammini</u>.

Oss.: 1) L'omotopia di cammini così definita è una relaz. di equivalenza.

2) Attenzione alla terminologia: <u>omotopia di cammini</u> allora è una nozione più restrittiva dell'omotopia „standard" (che potremmo considerare anche per due cammini). Nel corso sarà facile non sbagliarsi: fra cammini considereremo <u>solo</u> l'omotopia di cammini, e <u>mai</u> l'omotopia „standard".

considereremo solo l'omotopia di cammini, e mai l'omotopia „standard".

Esempio: Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $a, b \in X$ sono punti qualsiasi, allora ogni α e $\beta \in \Omega(X, a, b)$ sono cammini omotopicam. equivalenti

Oss.: Giunzione e inversione sono ben definite anche fra le classi di omotopia di cammini, cioè dati

$\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$, $\alpha \sim \alpha'$,

$\beta, \beta' \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \sim \beta'$

allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ (la verifica è immediata, basta „appiccicare" le due omotopie da α ad α' e da β a β') e anche $i(\alpha) \sim i(\alpha')$ (qui basta rimpiazzare t con $1-t$ nell' omotopia da α ad α').

Vediamo ora che passando da un cammino ad una „riparametrizzazione" si ottiene un cammino equivalente a quello di partenza.

Lemma: Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e sia $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ continua tale che $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$. Allora α è equivalente a $\beta \in \Omega(X, a, b)$ definito come $\beta(t) = \alpha(\Phi(t))$.

Dim: Un'omotopia di cammini da α a β è $F(t, s) = \alpha\big((1-s)t + s\Phi(t)\big)$

<u>Dim:</u> Un'omotopia di cammini da α a β è $F(t,s) = \alpha\big((1-s)t + s\Phi(t)\big)$

$\square$

<u>Oss.:</u> In generale, la giunzione <u>non è</u> associativa, se consideriamo i cammini veri e propri. Però è associativa a meno di omotopia di cammini; l'idea è che $(\alpha*\beta)*\gamma$ e $\alpha*(\beta*\gamma)$ differiscono solo per una <u>riparametrizzazione</u>.

<u>Proposizione:</u> Dati $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$, $\gamma \in \Omega(X, c, d)$ abbiamo $(\alpha*\beta)*\gamma \sim \alpha*(\beta*\gamma)$.

<u>Dim.:</u> $\big((\alpha*\beta)*\gamma\big)(t) = \big(\alpha*(\beta*\gamma)\big)\big(\varphi(t)\big)$ dove

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{per } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ t + \frac{1}{4} & \text{per } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{t+1}{2} & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\square$

<u>Definizione</u>: Nell'insieme $\Omega(X, \underbrace{a, a}_{\text{uguali}})$ è definito il cammino costante $1_a : [0,1] \longrightarrow X$ come $1_a(t) = a \ \forall t$.

<u>Proposizione:</u> Dato $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ allora sono definiti $1_a * \alpha$ e

Proposizione: Dato $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ allora sono definiti $1_a * \alpha$ e $\alpha * 1_b$, e vale:

1) $1_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * 1_b$

2) $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$, $\quad i(\alpha) * \alpha \sim 1_b$

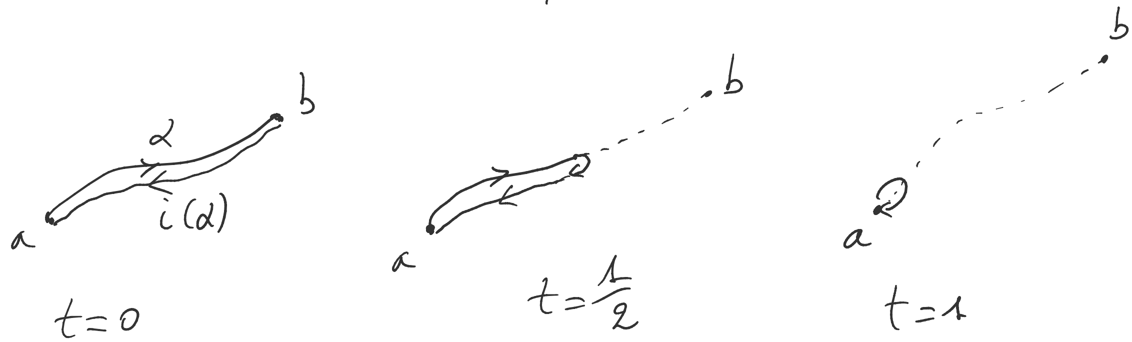
(cioè, a meno di omotopia, 1_a ha il ruolo di elem. neutro e $i(\alpha)$ ha il ruolo di inverso di α).

Dimostrazione: 1) Le omotopie di cammini si ottengono riparametrizzando:

$$(1_a * \alpha)(t) = \alpha(\psi(t)) \quad \text{dove} \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t - 1 & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * 1_b)(t) = \alpha(\eta(t)) \quad \text{con } \eta(t) \text{ analoga.}$$

2) Idea:



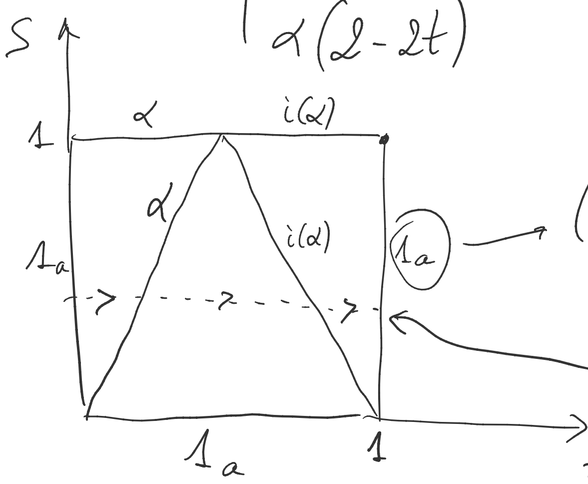
(cioè i cammini "intermedi" si ottengono percorrendo solo un pezzo di α, e poi tornando indietro con $i(\alpha)$)

Questo si realizza con l'omotopia seguente:

$$\begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } t \in [0, \frac{s}{2}] \end{cases}$$

$$F(t,s)=\begin{cases}\alpha(2t) & \text{per } t\in\left[0,\frac{s}{2}\right]\\ \alpha(s) & \text{per } t\in\left[\frac{s}{2},1-\frac{s}{2}\right]\\ \alpha(2-2t) & \text{per } t\in\left[1-\frac{s}{2},1\right]\end{cases}$$

Schematicamente:



(vuol dire che restringendo F a questo segmento si ottiene 1_a)

Percorre un pezzo di α, poi sta fermo per un po', poi torna indietro

<u>Proposizione</u>: Sia $f: X \to Y$ applic. continua fra spazi topologici.

1) Dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ con $\alpha \sim \beta$, allora $f\circ\alpha$ e $f\circ\beta$ sono in $\Omega(Y, f(a), f(b))$ e vale $f\circ\alpha \sim f\circ\beta$.

2) Dati $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$ abb.

$$f\circ(\alpha * \beta) = (f\circ\alpha) * (f\circ\beta)$$

e $i(f\circ\alpha) = f\circ(i(\alpha))$.

<u>Dim.</u>: 1) Si verifica immediatam. che, se $F: [0,1]\times[0,1] \to X$ è un'omotopia di cammini da α a β, allora la composizione

$f \circ F : [0,1] \times [0,1] \to Y$ è un'omotopia di cammini da $f \circ \alpha$ a $f \circ \beta$.

2) Immediata dalle definizioni.

$\square$

<u>Definizione:</u> Sia X spazio topologico, $a \in X$. Definiamo

$$\pi_1(X, a) = \frac{\Omega(X, a, a)}{\sim}$$

$\sim$ ← omotopia di cammini

Come al solito, dato $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ denotiamo $[\alpha] \in \pi_1(X, a, a)$ la sua classe d'equivalenza.

<u>Teorema:</u> Con la giunzione e l'inversione (di classi di cammini), $\pi_1(X, a)$ è un gruppo, con elemento neutro $[1_a]$. Cioè l'operazione di gruppo è

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

e l'inverso di $[\alpha]$ è $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$.

<u>Dim.:</u> E' una conseguenza immediata di quanto visto finora.

$\square$

Definizione: $\pi_1(X, a)$ si dice gruppo fondamentale (o primo gruppo di omotopia) di X (con punto base a).

Oss.: Sia X_0 la componente connessa per archi di X contenente a. Allora ogni cammino $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ è in realtà tutto contenuto in X_0. Segue che $\pi_1(X, a)$ dipende solo da X_0 (anche se formalmente π_1 è definito usando tutto X).

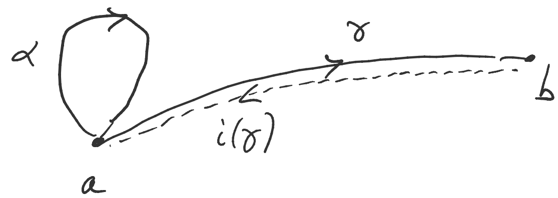
Esempio: Ovviamente se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso allora $\pi_1(X, a)$ è banale (cioè contiene solo l'elem. neutro) $\forall a \in X$.

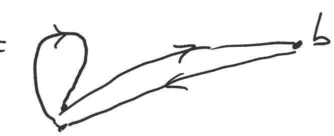
Oss.: Attenzione: se $a, b \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, i gruppi $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(X, b)$ sono strettamente legati fra loro, ma non sono lo stesso gruppo. Vediamolo in dettaglio:

Lemma: Siano a, b nella stessa componente connessa per archi di X. Scegliamo $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ un cammino da a a b, e definiamo un'applicazione

$$\gamma_\# : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, b)$$

$$[\alpha] \longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$



$\gamma_\#([\alpha]) =$ 

Allora $\gamma_\#$ è ben definita ed è un <u>isomorfismo</u> di gruppi.

<u>Dim.:</u> $\gamma_\#$ è ben definita, perché $\overbrace{\text{"la concatenazione si comporta bene"}}^{\text{abb. già visto che}}$ con l'omotopia di cammini, cioè se $\alpha \sim \alpha'$ allora $i(\gamma) * \alpha * \gamma \sim i(\gamma) * \alpha' * \gamma$.

Dim. che $\gamma_\#$ è un omom. di gruppi: dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, a)$ dim. che

$$\underbrace{\gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta])}_{\cdot \text{ op. in } \pi_1(X,b)} \overset{(?)}{=} \gamma_\#\Big(\underbrace{[\alpha] \cdot [\beta]}_{\cdot \text{ op. in } \pi_1(X,a)}\Big)$$

Abb.:

$$\gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [i(\gamma) * \beta * \gamma] =$$

$$\gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [i(\gamma) * \beta * \gamma] =$$

$$= [i(\gamma) * \alpha * \underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{cammino omotopo a } 1_a} * \beta * \gamma] \underset{\text{per quello che abb. osservato prima riguardo a giunzione e omot. di cammini}}{=} [i(\gamma) * \alpha * \underbrace{1_a * \beta}_{\text{omotopo a } \beta} * \gamma] =$$

$$= [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] = \gamma_\#([\alpha * \beta]) = \gamma_\#([\alpha] \cdot [\beta]).$$

Quindi $\gamma_\#$ è un omomorfismo di gruppi. Dim. che è un isomorfismo dandone l'inversa; è $i(\gamma)_\# : \pi_1(X,b) \longrightarrow \pi_1(X,a)$.

Infatti $(i(\gamma)_\#) \circ \gamma_\# = Id_{\pi_1(X,a)}$, perché

$$(i(\gamma)_\#)\left(\gamma_\#([\alpha])\right) = (i(\gamma)_\#)\left([i(\gamma) * \alpha * \gamma]\right) =$$

$$= [\underbrace{i(i(\gamma))}_{= \gamma} * i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma)] = [\underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{omotopo a } 1_a} * \alpha * \underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{omotopo a } 1_a}] =$$

$= [1_a * \alpha * 1_a] = [\alpha]$.

E si verifica analogam. che $\gamma_\# \circ (i(\gamma)_\#) = Id_{\pi_1(X,b)}$, per cui $\gamma_\#$ e $i(\gamma)_\#$ sono una l'inverso dell'altra.

$\square$

<u>Oss.</u>: 1) Il gruppo fondamentale è utile per dimostrare che due sp. topologici <u>non</u> sono omeomorfi, lo vedremo in dettaglio. L'idea è che se sono omeomorfi allora i gruppi fondamentali sono isomorfi (va fatta attenzione ai punti base però).
Vedremo anche che lo stesso vale con l'equivalenza omotopica invece dell'omeomorfismo.

2) Se X è connesso per archi, si parla anche semplicemente di gruppo fondam. di X senza riferimento al punto base, e si scrive $\pi_1(X)$. E' una nozione imprecisa tuttavia, nel senso che è un gruppo "definito a meno di isomorfismo".

<u>Definizione</u>: Uno sp. topologico X si dice <u>semplicemente connesso</u> se è connesso per archi e se $\pi_1(X)$ è banale (più precisamente diremmo che $\pi_1(X,a)$ è banale per un $a \in X$,

(più precisamente diremmo che $\pi_1(X,a)$ è banale per un $a \in X$, e quindi è banale per ogni $a \in X$).