Geometria 2, Lezione 17

Thursday, 29 April 2021 09:20

TOPOLOGIA ALGEBRICA

Omotopia

Definizione: Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \to Y$ fra due spazi topologici si dicono omotope se esiste un'appl. continua $F: X \times [0,1] \to Y$ tale che $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$ $\forall x \in X$. L'applicaz. F si dice omotopia fra f_0 e f_1.

Oss.: Data F, possiamo denotare $f_t : X \to Y$ l'applicazione $f_t(x) = F(x,t)$ con $t \in [0,1]$ fissato. Possiamo pensarle come una „famiglia" di applicazioni continue, che dipendono dal parametro $t \in [0,1]$.

Esempio: Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso, allora qualsiasi siano X, f_0, f_1 abb. che f_0 e f_1 sono omotope, infatti basta usare il „parametro" t per percorrere il segmento che va da $f_0(x)$ a $f_1(x)$, cioè definiamo $F(x,t) = (1-t) f_0(x) + t f_1(x)$, che è un'omotopia fra f_0 e f_1.

Lemma: L'omotopia è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle funz. continue $C(X,Y) = \{ f: X \to Y \text{ continua} \}$ (con X e Y fissati).

Dim.: 1) Ogni $f: X \to Y$ è omotopa a se stessa, basta prendere $F(x,t) = f(x)$ $\forall x \in X$ $\forall t \in [0,1]$.

2) Se f_0 è omotopa a f_1, cioè esiste un'omotopia F con $F(-,0) = f_0$ e $F(-,1) = f_1$, allora $G: X \times [0,1] \to Y$ def. come $G(x,t) = G(x, 1-t)$ è un'omotopia fra f_1 e f_0. Quindi f_1 è omotopa a f_0.

3) Supp. f_0 omotopa a f_1 tramite un'omotopia F, e f_1 omotopa a f_2 tramite un'omotopia G, allora dim. che f_0 è omotopa a f_2: basta definire l'omotopia

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(x, 2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\square$

Esempio: Consid. $f: S^n \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto -x$ la mappa antipodale.

$$x \longmapsto -x$$

Domanda: f è omotopa all'identità $id_{S^n}: S^n \to S^n$?

È una domanda difficile, vediamo casi particolari.

Se $n=1$ allora f è omotopa all'identità, perché basta prendere come F la rotazione attorno all'origine di un angolo $t \cdot \pi$, allora per $t=0$ abbiamo l'identità, invece se $t=1$ allora abbiamo la rotazione di π, che è proprio f.

Possiamo applicare quest'idea per ogni n <u>dispari</u>, invece per n pari f e id_{S^n} <u>non sono omotope</u>. Vediamo con precisione il caso n dispari. Vediamo S^n dentro $\underbrace{\mathbb{R}^{n+1}}_{\text{pari}} = \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$, cioè

$$S^n = \{ z \in \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}} \mid \|z\| = 1 \}$$

e definiamo $F(z,t) = z e^{i\pi t}$, che è effettivam. un'omotopia da id_{S^n} a f.

<u>Definizione</u>: Un'applicazione continua $f: X \to Y$ si dice <u>equivalenza omotopica</u> se esiste $g: Y \to X$ continua tale che $g \circ f: X \to X$ è omotopa all'identità id_X e $f \circ g: Y \to Y$ ...

omotopa all'identità id_X, e $f \circ g : Y \to Y$ è omotopa all'identità id_X.

Due spazi topologici si dicono <u>omotopicam. equivalenti</u> se esiste una equivalenza omotopica fra X e Y.

<u>Oss.:</u> Un omeomorfismo è anche un'equivalenza omotopica, quindi spazi omeomorfi sono anche omotopicam. equivalenti. Il viceversa non vale, cioè l'equivalenza omotopica è una relazione più debole dell'omeom. Infatti ad esempio tutti i sottospazi <u>convessi</u> non vuoti di $\mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti, vediamolo:

siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ convessi non vuoti, prendiamo due applicazioni <u>costanti</u> $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$. Allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono appl. continue e omotope rispettivam. all'identità su Y e su X, perché i codomini sono convessi.

<u>Definizione:</u> Uno spazio topologico si dice <u>contraibile</u> (o <u>contrattile</u>) se è omotopicam. equivalente a un singolo punto.

<u>Oss.:</u> 1) X è <u>contraibile</u> se e solo se $id_X : X \to X$ è omotopa

Oss.: 1) X è <u>contraibile</u> se e solo se $id_X : X \to X$ è omotopa a un'applicazione <u>costante</u> $X \to X$.

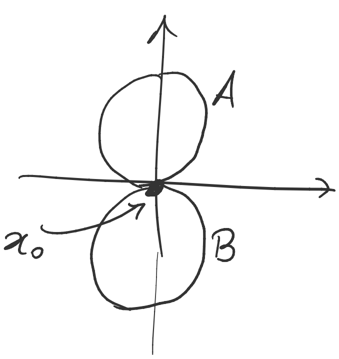
2) X contraibile $\Longrightarrow$ X connesso per archi

Il viceversa non è vero, ad es. vedremo che S^1 non è contraibile.

Retrazioni e deformazioni

<u>Definizione</u>: Sia X sp. topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice <u>retratto</u> di X se esiste un'applicazione continua $r : X \to Y$ tale che $r(y) = y$ $\forall y \in Y$.

<u>Esempio</u>: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dall'unione di due circonferenze A e B che si toccano in un punto:



$X = A \cup B$

$A \cap B = \{x_0\}$

Allora A è un retratto di $X = A \cup B$, ad es.

$$r : X \to A$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ x_0 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

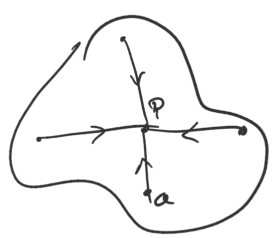
Definizione: Sia X spazio topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice <u>retratto per deformazione</u> di X se esiste un'applicazione continua (detta <u>deformazione</u>)

$$R : X \times [0,1] \longrightarrow X$$

tale che

1) $R(x,0) \in Y$ e $R(x,1) = x \quad \forall x \in X$
2) $R(y,t) = y \quad \forall y \in Y \ \forall t \in [0,1]$

Esempio: 1) Se $A \in \mathbb{R}^n$ è <u>stellato</u>, cioè esiste un punto $p \in A$ tale che $\forall a \in A$ il segmento da p ad a è tutto contenuto in A,



allora $\{p\}$ è un retratto per deformazione di A, basta prendere

$$R(x,t) = tx + (1-t)p$$

2) Riprendiamo $X = A \cup B$ l'unione di due circonferenze come prima. Allora A <u>non è</u> un retratto per deformazione di X, ma non è facile dimostrarlo, lo vedremo.

Proposizione: Siano X uno sp. topologico, e $Y \subseteq X$ un retratto per deformazione di X. Allora Y è un retratto di X, e l'inclusione $\iota : Y \to X$, $y \mapsto y$ è un'equivalenza omotopica.

Dim.: Sia $R : X \times [0,1] \to Y$ una deformazione. Allora ponendo

$$r : X \to Y, \quad x \mapsto R(x,0)$$

otteniamo chiaramente una retrazione, quindi Y è un retratto di X. Inoltre, dalle proprietà di R segue anche che R stessa è un'omotopia fra $\iota \circ r$ e id_X, e anche che $r \circ \iota$ è proprio uguale all'identità id_Y.

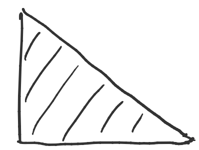
Quindi r (e anche l'inclusione ι) è un'equivalenza omotopica.

Esempi: 1) S^n è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, basta prendere la deformazione

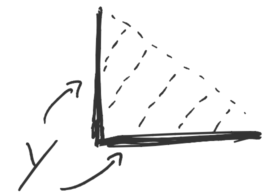
$$R : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$(x, t) \longmapsto tx + \frac{x}{\|x\|} \cdot (1-t)$$

2) X = triangolo („pieno") in $\mathbb{R}^2$

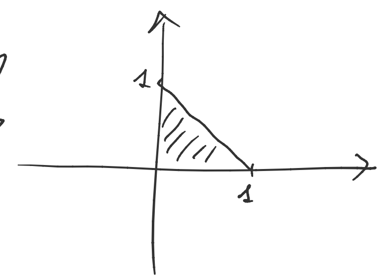


Y = unione di due lati del triangolo

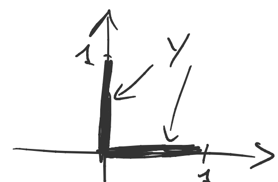


allora Y è retratto per deformazione di X. Vediamolo in dettaglio in un esempio concreto (in generale è simile):

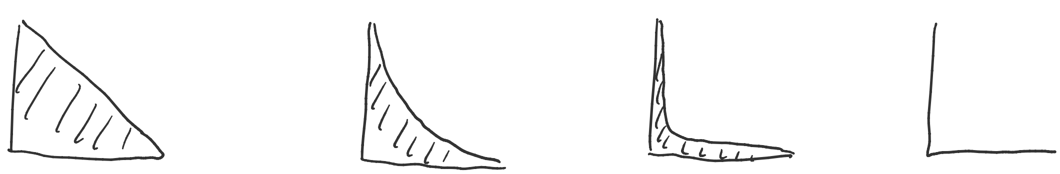
$$X = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0,\ b \geq 0,\ a+b \leq 1 \}$$



$$Y = X \cap (\text{assi cartesiani})$$



Una deformazione si può dare in tanti modi, l'idea è di „schiacciare" (al variare di un parametro $t \in [0,1]$) il triangolo X sui due lati



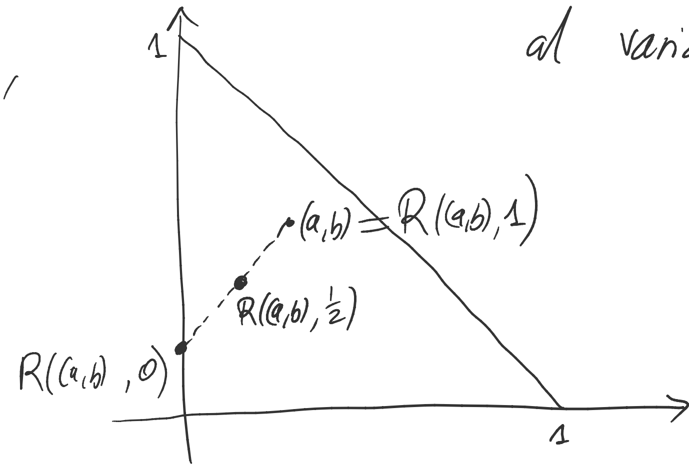
$t=1$ ... ... $t=0$ (← per la definizione, devo avere Y come immagine per $t=0$)

Ad es.

Ad es.

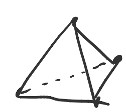
$$R((a,b),t) = t(a,b) + (1-t)(a-\min\{a,b\},\ b-\min\{a,b\})$$

fa „percorrere" ad ogni punto (a,b) il segmento a $45°$ verso gli assi, al variare di t da 1 a 0.



3) L'esempio 2) si generalizza a qualsiasi <u>n-simplesso</u> in $\mathbb{R}^n$,

(n-simplesso = inviluppo convesso di n punti non contenuti in alcun iperpiano affine, quindi 1-simplesso = segmento, 2-simplesso = triangolo pieno, 3-simplesso = tetraedro pieno, ecc...)



ottenendo che un qualsiasi n-simplesso ha come retratto per deformazione l'unione di alcune sue facce (al più n), ad esempio:

$$X = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1,\dots,a_n \geq 0,\ a_1+\dots+a_n \leq 1\}$$

$$Y = X \cap \{a_1 \cdots a_n = 0\}$$

(viene l'unione di tutte le facce tranne una, come nell'es. 2)).

tranne una, come nell'es. 2)).