Geometria 2, Lezione 16

Thursday, 15 April 2021 09:08

Spazi metrici compatti, e numerabilità

Def.: Sia X spazio metrico. X si dice <u>totalmente limitato</u> se $\forall r>0 \ \exists x_1, \dots, x_n \in X \mid X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$

(oss.: n e i punti $x_1, \dots, x_n$ <u>dipendono</u> da r, potremmo scrivere $n = n(r)$ e $x_i = x_i(r)$)

Lemma: Se X è uno spazio metrico totalmente limitato allora X è separabile, in particolare X è 2°-numerabile.

Dim.: Consid. $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ un insieme finito $E_m = \{x_1, \dots, x_n\}$ tale che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{m})$.

detto meglio: $x_{1(\frac{1}{m})}, \dots, x_{n(\frac{1}{m})}(\frac{1}{m})$

Allora $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m$ è numerabile, inoltre è denso perché per ogni $x \in X$ e ogni $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ esiste qualche punto di E a distanza $< \frac{1}{m}$ da x.

Segue: X è separabile. $\square$

$\square$

<u>Teorema:</u> Sia X spazio metrico. Sono equivalenti

1) X compatto,

2) X compatto per successioni,

3) X completo e totalmente limitato.

<u>Dim:</u> $1) \Rightarrow 2)$ Sappiamo che X è 1°-numerabile perché sp. metrico, e compattezza + (1°-numerabilità) $\Rightarrow$ compattezza per successioni.

$2) \Rightarrow 3)$ Sia X compatto per successioni, e sia a successione di Cauchy. Allora ammette una sottosucc. convergente, e segue che a è convergente.

Dim. per assurdo che X è totalmente limitato. Sia $r>0$ tale che X non è ricopribile con un numero finito di palle aperte di raggio r. Costruiamo una successione:

a_1 a piacere in X,

a_2 scelto in $X \setminus B(a_1, r)$,

a_2 scelto in $X \setminus B(a_1, r)$,

a_3 scelto in $X \setminus \left(B(a_1, r) \cup B(a_2, r)\right)$

$\vdots$

a_n scelto in $X \setminus \left(B(a_1, r) \cup \ldots \cup B(a_{n-1}, r)\right)$

Con questa scelta $d(a_n, a_m) \geq r$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, per cui nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy, e quindi nessuna sottosuccessione è convergente: assurdo.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Supp X completo e totalmente limitato. Per il lemma, X è 2°-numerabile, quindi posso dim. che X è compatto per successioni, e avrò anche che X è compatto.

Sia a successione in X, consid. per ogni $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ un insieme finito E_m tale che $X = \bigcup_{e \in E_m} B(e, 2^{-m})$.

Costruiamo una sottosucc. convergente:

per $m = 1$ scegliamo $e_1 \in E_1$ tale che $B(e_1, 2^{-1})$ contiene a_n per infiniti valori di n. Scegliamo anche k_1 tale che $a_{k_1} \in B(e_1, 2^{-1})$

che $a_{k_1} \in B(e_1, 2^{-1})$.

per $m=2$ scegliamo $e_2 \in E_2$ tale che $B(e_1, 2^{-1}) \cap B(e_2, 2^{-2})$ contiene a_n per infiniti valori di n. Scegliamo anche k_2 tale che $a_{k_2} \in B(e_1, 2^{-1}) \cap B(e_2, 2^{-2})$, e $k_2 > k_1$.

Si dimostra facilmente: la sottosuccessione a_{k_j} è di Cauchy, e quindi converge perché X è completo. Allora X è compatto per successioni.

$\square$

Altre osservazioni sulla numerabilità

Siano X, Y spazi topologici, consid. $X \times Y$, e consid. $Z \subseteq X$ sottospazio.

cioè se X e Y sono 1°-num. allora $X \times Y$ lo è

	1° numerabilità	2°-numerabilità	separabilità
$X \times Y$	✓	✓	✓
$Z \subseteq X$	✓	✓	NO

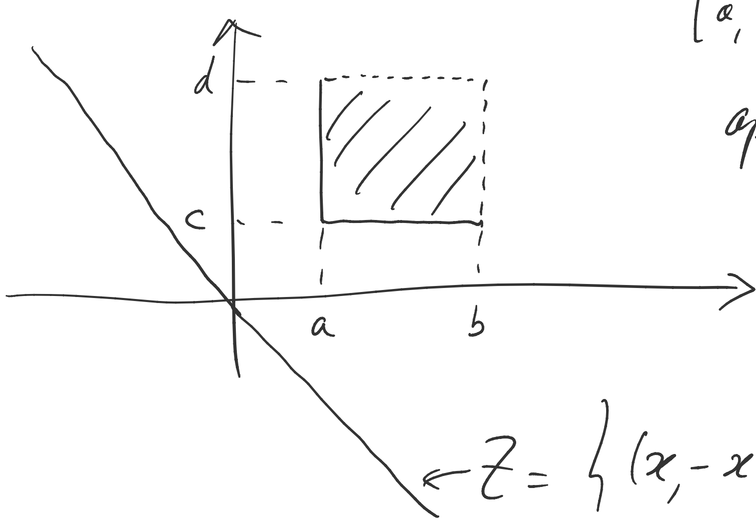
cioè se

cioè se X è 1^o num. allora Z è 1^o num.

attenzione!

<u>Esempio</u>: Esistono spazi separabili che hanno sottospazi non separabili, ad esempio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dove su ciascun fattore mettiamo la top. di Sorgenfrey. Infatti $\mathbb{R}$ è separabile ($\mathbb{Q}$ è denso anche in questa topologia) e anche $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

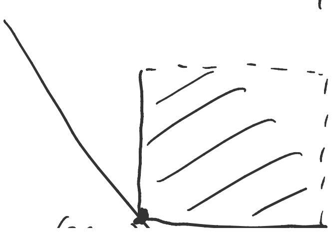
Su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:



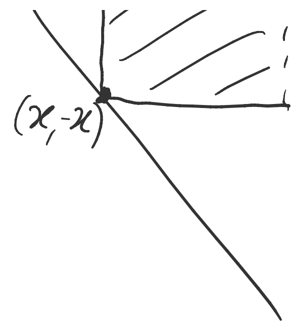
$[a,b[\times[c,d[$ è aperto in questa topologia.

$\leftarrow Z = \{(x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

Per ogni $(x,-x)\in Z$ esiste un rettangolo „semiaperto", cioè un aperto di $\mathbb{R}^2$ in questa topologia, che interseca Z solo in $(x,-x)$:



Allora non è separabile, perché la topologia su Z è quella discreta



topologia su Z è quella discreta (i singoli punti sono aperti). Allora la chiusura di ogni sottoinsieme è il sottoinsieme stesso, per cui Z non è separabile perché non è numerabile.

Complementi

SOTTOBASI

Def.: Sia X spazio topologico, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{S}$ si dice <u>sottobase</u> (della topologia) se la famiglia ottenuta prendendo intersezioni di un numero finito di elt di $\mathcal{S}$ è una base della topologia.

Oss.: Se definiamo come X l'intersezione di una famiglia <u>vuota</u> di sottoinsiemi di X, allora <u>ogni</u> collezione $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X è sottobase di qualche topologia (infatti la famiglia delle intersezioni di un numero finito di elt di $\mathcal{S}$ è sicuramente base di una qualche topologia).

PRODOTTI INFINITI

PRODOTTI INFINITI

Sia I un insieme di indici (anche infinito) e per ogni $i \in I$ sia dato X_i spazio topologico. Allora sul prodotto

$$\prod_{i \in I} X_i = X$$

si possono definire diverse topologie. La <u>topologia prodotto</u> su X è la topologia meno fine che rende tutte le proiezioni $p_i : X \to X_i$ continue.

Allora devono essere aperti in X tutti i sottoinsiemi del tipo

$$\prod_{i \in I} A_i \qquad \text{dove } A_i = X_i \ \forall i \text{ tranne che } i = i_0,$$
$$\text{dove } A_{i_0} \subseteq X_{i_0} \text{ è aperto.}$$

perché allora $p_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \prod_{i \in I} A_i$.

Si dimostra che questi sottoinsiemi di X sono una sottobase della topologia prodotto.

Quindi una base della top. prodotto è data scegliendo famiglie

Quindi una base della top. prodotto è data scegliendo famiglie finite di indici $i_1, .., i_n \in I$, aperti $A_{i_1} \subseteq X_{i_1}, .., A_{i_n} \subseteq X_{i_n}$, e prendendo

$$\prod_{i \in I} A_i \quad \text{dove} \quad A_j = X_j \quad \forall j \notin \{i_1, .., i_n\}.$$

Si può definire anche una topologia più fine, detta <u>box topology</u>, di cui una base è fatta dai sottoinsiemi del tipo

$$\prod_{i \in I} A_i \quad \text{dove} \quad A_i \subseteq X_i \text{ aperto } \forall i.$$

<u>Teorema</u> (Tychonoff): Se X_i è compatto $\forall i$, allora X con topologia prodotto è compatto.

<u>Idea della dim.:</u>

1) Si riformula la compattezza usando i chiusi:
uno spazio topologico Y è compatto se e solo se: data una famiglia di chiusi per cui ogni sottofamiglia finita ha intersezione non vuota, l'intersezione di <u>tutta</u> la famiglia di chiusi è non vuota.
(Questa formulazione della compattezza è equival. pensando ai complementari

(Questa formulazione della compattezza è equival. pensando ai complementari degli elem. di un ricoprim. aperto.)

2) Si prende una famiglia di chiusi di X come sopra, si proiettano sugli X_i, si prendono le chiusure, e per ogni i ottengo $x_i \in X_i$ nell'intersezione ($\Leftarrow X_i$ compatto).

3) Si dimostra che $(x_i)_{i \in I}$ è nell'intersezione della famiglia da cui ero partito (parte difficile).

<u>Oss.</u>: Il teorema di Tychonof è equivalente all'assioma della scelta.

Abbiamo: l'assioma della scelta afferma semplicemente che

$$\prod_{i \in I} X_i \quad \text{è } \underline{\text{non vuoto}}.$$

<u>Esempio</u>: Sia $I = \mathbb{R}$, $X_i = \mathbb{R}$ $\forall i$.

Allora
$$\prod_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

Consid. ad esempio la topologia euclidea su $\mathbb{R}$, e la topologia prodotto, pensata come topologia su $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Un elemento della base è dato allora scegliendo $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ e aperti $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ e considerando

$$\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_i) \in A_i \}$$

La topologia prodotto in questo caso si chiama anche topologia <u>punto-aperto</u>. Spesso si induce questa topologia su sottoinsiemi notevoli, ad es. $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

In questa topologia $f_n \to f \iff f_n$ converge <u>puntualmente</u> a f.

Analogamente si definisce la topologia <u>compatto-aperto</u> su $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, una base è data scegliendo un numero finito di <u>compatti</u> $K_1, \dots, K_n \subseteq \mathbb{R}$ e aperti $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ e prendendo

$\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $| \ f(K_i) \subseteq A_i \}$.

In questa topologia $f_n \to f \iff f_n|_K$ converge uniformemente a $f|_K$ $\forall K \subseteq \mathbb{R}$ compatto.