Geometria 2, Lezione 14

Monday, 12 April 2021 07:14

Esempi ed esercizi

Soluzioni degli esercizi dati prima di Pasqua.

Esercizio 1: $\mathcal{B} = \{]-q,q[\mid q \in \mathbb{Q},\ q>0 \}$

(1) $\mathcal{B}$ è base di una topologia:

da verificare

- $\mathbb{R} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ ok $\left(\mathbb{R} = \bigcup_{\substack{q>0 \\ q \in \mathbb{Q}}}]-q,q[\right)$

- $]-q,q[\cap]-r,r[=]-\min\{r,q\}, \min\{r,q\}[$ ok

Quindi $\mathcal{B}$ è base di una topologia.

Si verifica facilmente: gli ap. sono tutti del tipo

$]-s,s[$ con $s \in \mathbb{R}$, $s>0$ (opp. $\emptyset$, opp $\mathbb{R}$)

(2) $]-\infty,-1[^{\circ} = \emptyset$

(2) $]-\infty, -1[^{\circ} = \emptyset$

(nessun intervallo del tipo $]-s, s[$ è cont. in $]-\infty, -1[$)

$[-5, 2]^{\circ} = \,]-2, 2[$

(3) $\overline{]-\infty, -1[} = \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

(perché $]-1, 1[$ è il più grande aperto contenuto in $\mathbb{R} \setminus \,]-\infty, -1[$)

(4) Con questa topologia $\mathbb{R}$ è connesso (per la descriz. degli aperti, nessun aperto è anche chiuso tranne $\mathbb{R}$ e $\emptyset$),

non è compatto (usiamo il ricoprim. $\mathbb{R} = \bigcup_{s>0} \,]-s, s[$), non è di Hausdorff, perché ogni aperto che contiene ad es 2 contiene anche $]-2, 2[$.

anche $]-2,2[$.

Es. 2: Dimostriamo che $A \cap B$ è aperto denso se A, B sono aperti densi (caso generale: per induzione). Usiamo il fatto: un sottoinsieme C è denso se e solo se interseca tutti gli aperti non vuoti ($\exists D$ aperto non vuoto $\mid C \cap D = \emptyset \iff C \subseteq X \setminus D$, e cioè $\overline{C} \subseteq X \setminus D$).
X ← sp. top.

Sia allora E aperto non vuoto, sappiamo $E \cap A$ è non vuoto perché A è denso, ed è aperto. Allora $(E \cap A) \cap B$ è non vuoto, perché B è denso.

Es. 3

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

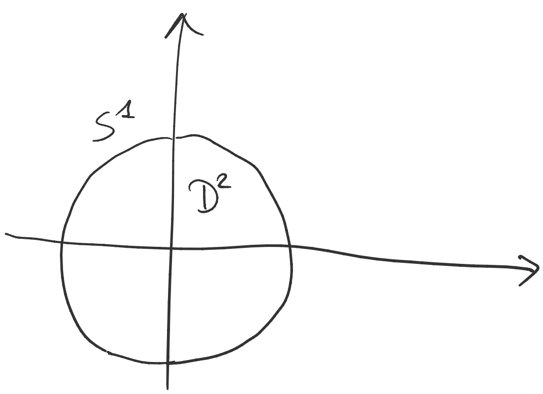
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\frac{x}{\|x\|}$ altrimenti

(1) f aperta? NO, ad es.

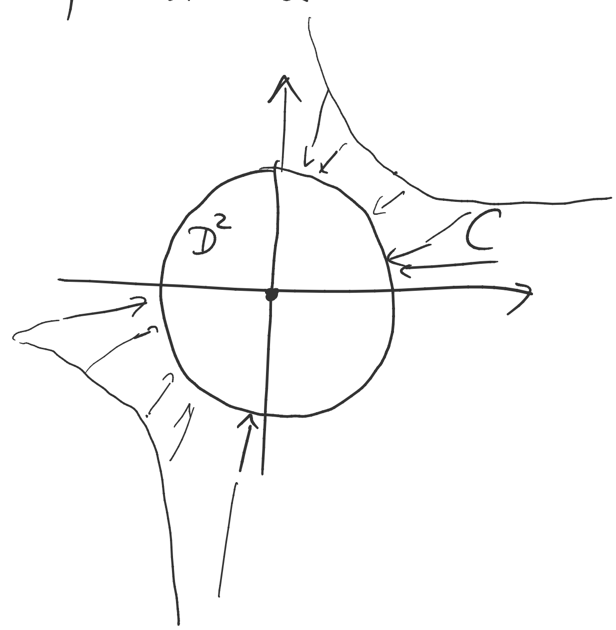
$K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$,

$f(K) = S^1 = \{\|x\| = 1\}$ non è aperto in D^2

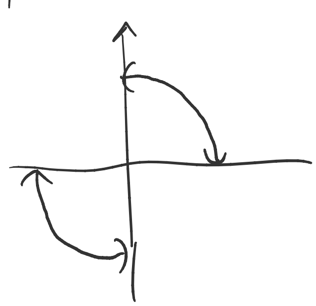


(2) f chiusa? NO, ad es.

$C = \{(a,b) \mid ab = 1\}$



$f(C) =$

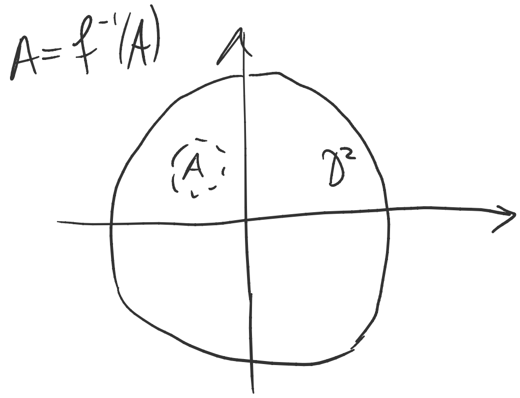


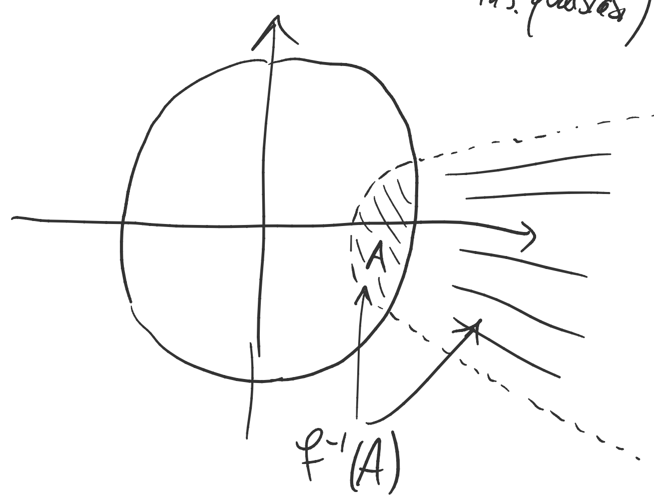
$f(C)$ non è chiuso.

(3) f identificazione?

(3) f identificazione!

Proviamo a descrivere $f^{-1}(A)$ con $A \subseteq D^2$ aperto (o ins. qualsiasi)





Sia $A \subseteq D^2$ sottoins. qualsiasi.

$$f^{-1}(A) = A \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\| > 1,\ \frac{x}{\|x\|} \in A \right\}.$$

Vogliamo dim. che f è identificazione, supp. $f^{-1}(A)$ aperto in $\mathbb{R}^2$, dim. che A è aperto in D^2.

Oss.:

$$A = f^{-1}(A) \cap D^2$$

e allora se $f^{-1}(A)$ ap. in $\mathbb{R}^2$ segue: A ap. in D^2 in top. di sottospazio. Cioè: f è un'identificaz..

Esercizio 5: (2) $\mathbb{R}$ con questa top. non è di Hausdorff, perché ad es. ogni aperto che contiene 1 deve contenere anche -1.

(5) Troviamo X di Hausdorff e $p: \mathbb{R} \to X$ che fattorizza ogni appl. continua $f: \mathbb{R} \to Y$ con Y di Hausdorff.

Oss.: $\forall f$ come sopra, $f(a) = f(-a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$, altrimenti potrei trovare in $\mathbb{R}$ intorni disgiunti risp. di a e $-a$ perché Y è di Hausdorff.

Definiamo rel. d'equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}$ data da $x \sim y \iff x = \pm y$, e def $X = \mathbb{R}/\sim$, $p: \mathbb{R} \to X$ il quoziente. Allora X è di Hausdorff, perché la topologia su X è discreta. Dim. che p fattorizza ogni $f: \mathbb{R} \to Y$ continua con Y di Hausdorff, fattorizza ogni $f: \mathbb{R} \to Y$ continua con Y di Hausdorff, usando la propr. universale delle identificazioni:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

$\exists$ se f è costante sulle fibre di p

ma abb. osservato che f è costante sulle classi d'equival., che sono le fibre di p, quindi p fattorizza f.

<u>Esercizio 8</u>: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto, Y ottenuto da X aggiungendo tutti i segmenti da p a q dove $p, q \in X$ e $\|p\| = \|q\|$.

Es.: se $X = S^1$ allora $Y = D^2$.

Usiamo prodotti di spazi topologici:

$$X \times X = \{(p,q) \mid p \in X,\ q \in X\} \quad \text{(compatto)}$$

$$Z = \{(p,q) \mid p, q \in X,\ \|p\| = \|q\|\} \quad \text{(chiuso in un}$$

$Z = \{ (p,q) \mid p,q \in X, \ \|p\| = \|q\| \}$ (chiuso in un compatto, Z è compatto)

Possiamo usare un parametro $t \in [0,1]$ per descrivere i punti di Y, cioè saranno i punti del tipo

$$p(1-t) + q \cdot t.$$

Cioè Y è l'immagine dell'applicazione

$$[0,1] \times Z \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$
$$(t, (p,q)) \longmapsto p(1-t) + q \cdot t$$

e $[0,1] \times Z$ è compatto: segue che Y è compatto.

<u>Esercizio 10</u>:

$$X = \{ (a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } s \in \mathbb{R} \text{ tale che } s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \}$$

(3) Da dim. $X \cap A_1$ chiuso, dimostriamo formula

(3) Da dim. $X \cap A_1$ chiuso, dimostriamolo facendo vedere che $X \cap A_1$ è compatto. Consideriamo:

$$Z = \{ (s, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s^n + \dots + a_n = 0,\ \sum_i |a_i| \leq 1 \}$$

Se $p: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è la proiez. sulle ultime n coordinate, allora $X \cap A_1 = p(Z)$, allora dimostriamo che Z è compatto, per cui $X \cap A_1$ sarà compatto, e allora è chiuso (e limitato).

Ora: Z è chiuso in $\mathbb{R}^{n+1}$, e va solo dim. che è limitato.
(se $K = \max_i |a_i|$, dimostrare che $s \leq \max\{1, K \cdot n\}$ se $(s, a_1, \dots, a_n) \in Z$)

Deduciamo: $X \cap A_1$ è compatto.

(4) Come nel punto (3), si dimostra che
$X \cap A_1, X \cap A_2, \dots$ sono tutti chiusi in $\mathbb{R}^n$,

in particolare $X \cap A_i$ è chiuso in A_i, cioè

$A_i \setminus (X \cap A_i)$ è aperto in A_i $\forall i$.

Ma $A_i \setminus (X \cap A_i) = (\mathbb{R}^n \setminus X) \cap A_i$.

Dalla parte (2), otteniamo: $\mathbb{R}^n \setminus X$ aperto.

Esempio: gli spazi proiettivi: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \dfrac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$

$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid v = \lambda w$

(stessa cosa con $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$).

Si fornisce $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$) della topologia quoziente partendo da quella euclidea su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (o $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$).

Proprietà: sono compatti e di Hausdorff.

Compattezza: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è anche immagine di S^{n+1} (compatta) tramite la proiezione. Quindi è compatto. Stessa cosa per tramite la proiezione, quindi è compatto. Stessa cosa per $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (prendendo $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}$).

Oss.: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è anche il quoz. di S^{n+1} dove identifico i punti antipodali.

Hausdorff: Osserviamo che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è anche quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ per il gruppo delle omotetie.

Allora consid.

$$K = \{ (x, \lambda x) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$

deve essere chiuso in $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Lo è perché è descritto dalla condizione

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} < 2$$

$$x_{n+1} \quad y_{n+1} \quad 1$$

che è data dall'annullarsi dei minori 2×2.