Geometria 2, Lezione 13

Tuesday, 30 March 2021 09:28

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \\ y \in Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dim. della propr. universale delle identif.

Definiamo $h : Y \to Z$: dato $y \in Y$ scegliamo $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Oss.: x esiste perché f è suriettiva.

Poniamo $h(y) = g(x)$, è ben def. perché g è costante sulle fibre di f. Dim. che h è continua: sia $A \subseteq Z$ aperto, controlliamo se $h^{-1}(A)$ è aperto. D'altronde f è un'identif., quindi $h^{-1}(A)$ $(\subseteq Y)$ è aperto se e solo se $f^{-1}(h^{-1}(A))$ è aperto in X. Inoltre $f^{-1}(h^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$, che è aperto perché g è continua. $\square$

Topologia quoziente

Sia X spazio topologico, con topologia $\mathcal{T}$. Sia $f : X \to Y$ un'applicaz. dove Y è un <u>insieme</u>. Supponiamo che f sia <u>suriettiva</u>. La famiglia di sottoins. di Y:

$$\{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \text{ aperto in } X \}$$

è una topologia su Y, ed è chiamata la <u>topologia quoziente</u>.

<u>Esercizio</u>: Verificare che è effettivam. una topologia.

<u>Oss.</u>: 1) Con la topologia quoziente su Y, f è continua. Inoltre f è anche un'identificazione. Di più: la top quoziente è l'unica su Y che rende f un'identificazione, ed è la topologia <u>più fine</u> che rende f continua.

2) Viceversa, sia $f: X \to Y$ identificazione. Allora la topologia che abb. su Y <u>coincide</u> con la topologia quoziente su Y data da f e da X.

3) Sia X spazio topologico, e sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su X. Allora è definito il <u>quoziente</u> $X/_{\sim} = \{$ insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ su $X\}$, e l'appl. suriettiva

$$\pi: X \longrightarrow X/_{\sim}$$
$$x \longmapsto [x] \leftarrow \text{classe di equival. di } x$$

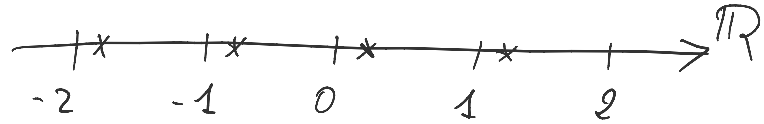
In questo caso possiamo definire la topologia quoziente su $X/_{\sim}$.

<u>Es.</u>: 1) Sia X sp. top. e $\sim$ definita come $x \sim y$ $\forall x, y \in X$. Allora $X/_{\sim}$ è formato da un singolo punto, e lo consid. come

Allora $X/\sim$ è formato da un singolo punto, e lo consid. come spazio topologico.

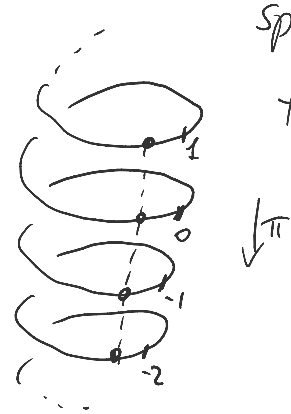
2) Sia $X = \mathbb{R}$, e la rel. d'equivalenza $x \sim y \iff x = y + n$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$. Allora $\ldots -1 \sim 0 \sim 1 \sim 2 \ldots$

$\ldots \sim -0{,}5 \sim 0{,}5 \sim 1{,}5 \sim 2{,}5 \sim \ldots$



Potremmo immaginarlo così:

come $\mathbb{R}$ avvolto su se stesso in una spirale, e stiamo identificando tutti gli elementi „in verticale".



Otteniamo intuitivamente $X/\sim \; = S^1$ (il cerchio).

Dimostriamo che effettivamente $X/\sim$ con la topologia quoziente è omeomorfo a S^1. Partiamo da

$$g : X \to S^1$$
$$r \mapsto (\cos(2\pi r), \sin(2\pi r))$$

(„avvolge" infinite volte la retta $X = \mathbb{R}$ sul cerchio S^1). Questa g è continua, ed è costante sulle fibre dell'applicazione $\pi : X \to X/\sim$, è continua, ed è costante sulle fibre dell'applicazione $\pi : X \to X/_\sim$, perché le fibre di π sono le classi di equivalenza, e vale $g(r+n) = g(r)$ $\forall r \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$. Per l'ultimo lemma visto, esiste $h : X/_\sim \longrightarrow S^1$ continua, tale che $g = h \circ \pi$.

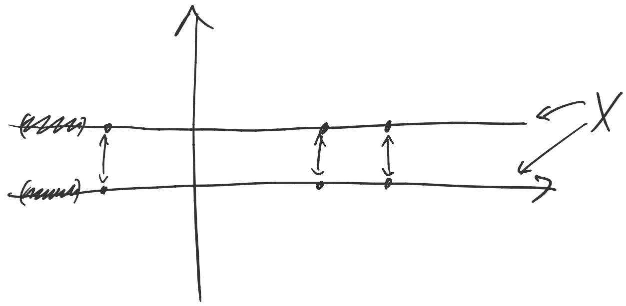
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & S^1 \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre qui h è suriettiva, ed è anche <u>iniettiva</u> perché se $g(x) = g(y)$ allora $x = y + n$ per un $n \in \mathbb{Z}$, e allora $[x] = [y]$.

Allora h è biiettiva. Avremo che h è un omeomorfismo se $X/_\sim$ è compatto e S^1 è di Hausdorff. Sappiamo che S^1 è di Hausdorff, rimane da dim. che $X/_\sim$ è compatto. Usiamo π, osservando che $\pi([0,1]) = X/_\sim$ (cioè ogni classe di equivalenza ha almeno un rappresentante in $[0,1]$). Visto che $[0,1]$ è compatto e π è continua, il quoziente $X/_\sim$ è compatto. Concludiamo: $X/_\sim$ è omeomorfo a S^1.

3) in $\mathbb{R}^2$ prendiamo $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ identifichiamo fra loro

$\uparrow$ i punti del tipo $(x,0)$ e $(x,1)$

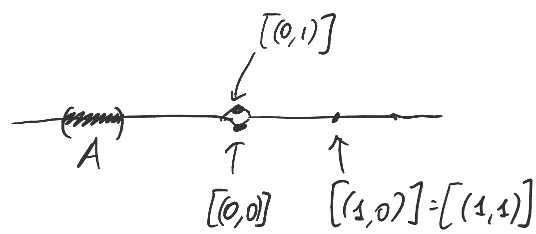


i punti del tipo $(x,0)$ e $(x,1)$

per ogni $x \neq 0$.

Cioè def. $\sim$ come: $(x,y)\sim(x',y') \iff \begin{cases}(x,y)=(x',y') \text{ opp.}\\ x=x'\neq 0 \text{ (e qualsiasi } y,y'\text{)}\end{cases}$

Otteniamo il quoziente $X/\sim$ che in un certo senso è $\mathbb{R}$ con l'origine „raddoppiata"



Non è di Hausdorff, perché i punti $[(0,0)]$ e $[(0,1)]$ non ammettono intorni disgiunti (<u>esercizio</u>).

<u>Oss.</u>: Sia $f: X \to Y$ identificazione. Sia $A \subseteq X$ <u>saturo</u>, cioè

$\forall a \in A, b \in X$: se $f(a)=f(b)$ allora anche $b \in A$.

Segue: A è controimmagine di un sottoinsieme di Y, esattam.

$A = f^{-1}(f(A))$. Si usa spesso che se A è anche aperto, allora $f(A)$ è aperto in X. (Cioè le immagini degli aperti saturi sono aperte).

Def.: Sia X spazio topologico. Definiamo $\text{Omeo}(X)=\{f:X\to X$ omeomorfismo$\}$. E' un gruppo, con operazione $\circ$ = composizione di applicazioni. Sia $G\subseteq \text{Omeo}(X)$ un <u>sottogruppo</u>. Allora è definita la relazione di equivalenza $x\sim y$ $(x,y\in X)$ se e solo se $\exists g\in G \mid g(x)=y$, e si definisce

$$X/G = X/\sim$$

Es.: L'esempio $\mathbb{R}/\sim$ dove $x\sim y \iff x=y+n$ per un $n\in\mathbb{Z}$ è un esempio di X/G. Infatti le traslazioni $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+n$ con $n\in\mathbb{Z}$ fissato sono tutti omeomorfismi di $\mathbb{R}$ in se stesso.

Inoltre $\{f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di $\text{Omeo}(\mathbb{R})$ $(f_n\circ f_m=f_{n+m},\ f_n^{-1}=f_{-n})$, e le classi di equivalenza sono proprio quelle dell'esempio precedente.

L'esempio 3) precedente invece no.

Vediamo proprietà notevoli di X/G.

Proposizione: Siano X e G come nella definizione, e si consideri

<u>Proposizione</u>: Siano X e G come nella definizione, e si consideri

$$\pi : X \longrightarrow X/G$$
$$x \longmapsto [x] = \{ g(x) \mid g \in G \}$$

(sappiamo già che π è un'identificazione) Allora π è <u>aperta</u>.

Inoltre se G è <u>finito</u> allora π è anche <u>chiusa</u>.

<u>Dim.</u>: Dim. che π è aperta, sia $A \subseteq X$ un aperto. Oss.: $\pi(A)$ è aperto se dim. che $\underbrace{\pi^{-1}(\underline{\pi(A)})}$ è aperto in X.

Abbiamo:
$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \{ x \in X \mid x \sim a \text{ con } a \in A \} =$$
$$= \{ x \in X \mid \exists g \in G \mid g(x) \in A \} =$$
$$= \bigcup_{g \in G} g(A)$$

(infatti se $g(x) = a \in A$ allora $g^{-1}(a) = x$, quindi $x \in g^{-1}(A)$)

Ogni $g \in G$ è un omeomorfismo di X in X, quindi $g(A)$ è aperto $\forall g$, e allora $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto. Segue: π è aperta.

Inoltre, supp G finito. Prendiamo $C \subseteq X$ chiuso, e dim.

Inoltre, supp G finito. Prendiamo $C \subseteq X$ chiuso, e dim.
che $\pi(C)$ è chiuso in X/G verificando che $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso:

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g(C)$$

è unione finita di chiusi, quindi è chiuso. $\square$

<u>Teorema:</u> Sia X spazio topologico, $G \subseteq \mathrm{Omeo}(X)$ sottogruppo. Supponiamo X di Hausdorff. Allora:

$$X/G \text{ è di Hausdorff} \iff K = \{(x, g(x)) \mid x \in X, g \in G\} \text{ è chiuso in } X \times X.$$

<u>Dim.:</u> Usiamo $\pi: X \to X/G$, oss. che è un'identif. aperta (per la proposizione precedente). Allora anche

$$\begin{aligned} \pi \times \pi : X \times X &\longrightarrow X/G \times X/G \\ (x, y) &\longmapsto ([x], [y]) \end{aligned}$$

è un'identificaz. aperta (esercizio). Osserviamo inoltre:

$$K = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G}) \qquad \text{dove } \Delta_{X/G} \text{ è la diag. in } X/G \times X/G$$

infatti $(\pi\times\pi)(x,y)\in\Delta_{X/G} \iff [x]=[y] \iff y=g(x)\ \exists g\in G$.

Adesso, visto che $(\pi\times\pi)$ è identificazione:

X/G di Hausdorff $\iff \Delta_{X/G}$ chiusa in $X/G\times X/G \iff (\pi\times\pi)^{-1}(\Delta_{G/A})$ chiusa in $X\times X$.

$\square$

Esempi ed esercizi

Esercizio (già assegnato) $X=\{A$ matrice $n\times n \mid \det(A)>0\}$ è connesso.

Svolgimento: Dim. che X è connesso per archi, in due passi.

Passo 1: Ogni $A\in X$ si può collegare con un cammino continuo ad una matrice A' con $\det(A')=1$:

Sia $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\end{pmatrix}$ consid. $\alpha:[0,1]\to X$

con $\alpha(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}(t) & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & & a_{nn}\end{pmatrix}$ dove $a_{i1}(t)=\dfrac{a_{i1}}{t\det(A)+(1-t)}$

allora $a_{i1}(0)=\dfrac{a_{i1}}{1}$

$a_{i1}(1)=\dfrac{a_{i1}}{\det(A)}$

$$a_{i1}(1) = \frac{a_{i1}}{\det(A)}$$

e $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = A'$ dove

α è continua perché le entrate di $\alpha(t)$ sono funzioni continue in t, e stiamo identif. $\{$matrici $n \times n\}$ con $\mathbb{R}^{n^2}$

$$\det(A') = \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = 1$$

$$\det(\alpha(t)) = \frac{\det(A)}{t\det(A) + (1-t)} > 0 \quad \forall t \in [0,1] \text{ quindi } \alpha(t) \in X \ \forall t.$$

Passo 2: Colleghiamo A' all'identità I (collegare due matrici $A, B \in X$ viene fatto concatenando i cammini $A \rightsquigarrow A' \rightsquigarrow I \rightsquigarrow B' \rightsquigarrow B$).

Usiamo: $SL(n)$ è generato (come gruppo) dalle matr. elementari $E_{ij}(s)$ dove $s \in \mathbb{R}$, $E_{ij} = I$ tranne che al posto (i,j) $(i \neq j)$ dove c'è s. Es. $E_{12}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se usiamo matr. 2×2).

Ricordiamo: questo fatto si dimostra con un analogo dell'algoritmo di Gauß: data una matrice $A' \in SL(n)$, esistono operazioni di riga che la rendono la matrice identità, e solo del tipo „una riga $\rightsquigarrow$ lei stessa $+ s$(un'altra riga)". Diamo questo fatto per dimostrato.

i-esima riga → i-esima stessa + s(un'altra riga). Diamo questo fatto per dimostrato.

Applicare tali operaz. di riga è come moltipl. a sinistra per matrici elementari, cioè esistono matr. elem.

$$E_{i_k,j_k}(s_k) \cdots E_{i_2,j_2}(s_2)\, E_{i_1,j_1}(s_1)\, A' = I \qquad \text{con } i_\ell \neq j_\ell \ \forall \ell, \quad s_\ell \in \mathbb{R}$$

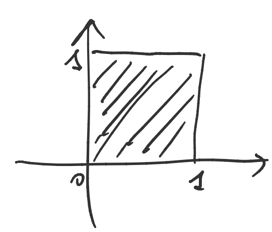
$$A' = E_{i_1,j_1}(-s_1) \cdots \underbrace{E_{i_k,j_k}(-s_k)}_{E_{i_k,j_k}(s_k)^{-1}}$$

Allora per collegare A' con I basta usare $\beta : [0,1] \to X$ con

$$\beta(t) = E_{i_1,j_1}(-s_1 \cdot (1-t)) \cdots E_{i_k,j_k}(-s_k(1-t))$$

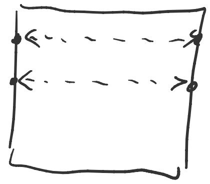
infatti $\beta(0) = A'$, $\beta(1) = I$, $\det(\beta(t)) = 1 \quad \forall t$.

<u>Esempio</u>: Prendiamo $X = [0,1] \times [0,1]$



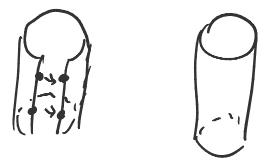
Def. $\sim$ rel. di equivalenza:

$$(a,b) \sim (a',b') \iff \begin{cases} (a,b) = (a',b') & \text{oppure} \\ a=0,\ a'=1,\ b=b' & \text{oppure} \end{cases}$$

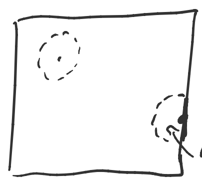


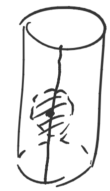
$$(a,b)\sim(a',b') \iff \begin{cases} (a,b)=(a',b') & \text{oppure} \\ a=0,\ a'=1,\ b=b' & \text{oppure} \\ a=1,\ a'=0,\ b=b' \end{cases}$$

Possiamo immaginare $X/_\sim$ geometricamente come la sp. laterale di un cilindro:

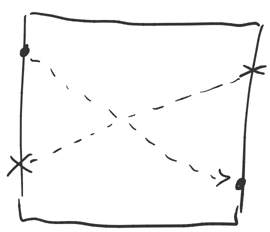


(più formalmente, si possono descrivere gli aperti di $X/_\sim$ descrivendo gli aperti saturi di X:



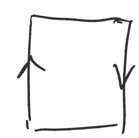

)

Altro esempio:

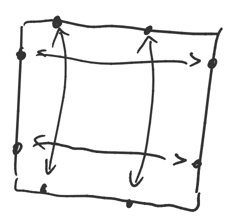


$$(a,b)\sim(a',b') \iff \begin{cases} (a,b)=(a',b') & \text{opp.} \\ a=0,\ a'=1,\ b'=1-b & \text{opp.} \\ a=1,\ a'=0,\ b'=1-b \end{cases}$$

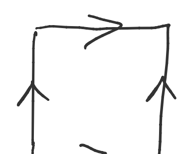
allora $X/_\sim$ è il nastro di Möbius. (in simboli:


)

Altro esempio:



(in simboli:

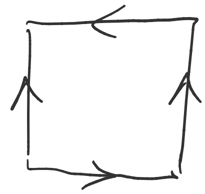

)

otteniamo:

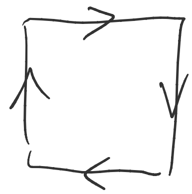
un toro („superficie di una ciambella")

un toro („superficie di una ciambella").

Altre possibilità:



bottiglia di Klein



?