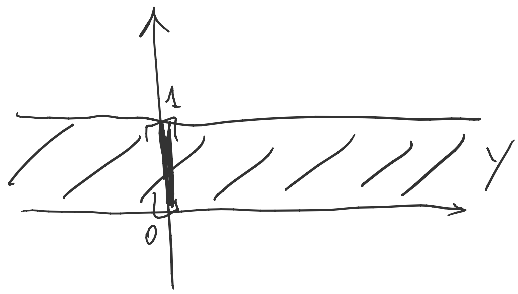
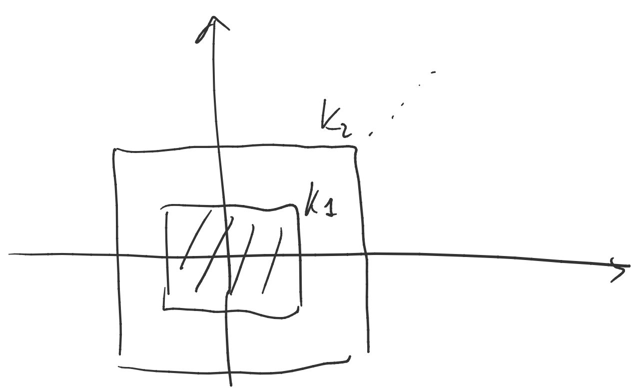
Geometria 2, Lezione 12

Thursday, 25 March 2021 07:21

Esempio: Dimostriamo che $X = \mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0,1] = Y$



Consid. il ricoprim. di X dato da $K_n = [-n, n]^2 = [-n,n] \times [-n,n]$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.



Oss.: K_n è compatto $\forall n$, K_n° = parte interna $=]-n,n[^2$ è un aperto, e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^\circ$.

Oss.: $X \setminus K_n^\circ$ è connesso, e anche $X \setminus K_n$, $\forall n$.

Supp. per assurdo che esista $f: X \to Y$ omeomorfismo. Allora $f(K_n^\circ)$ ricoprono Y, in particolare ricoprono $\{0\} \times [0,1]$ che è compatto, allora esiste N tale che $f(K_N^\circ) \supseteq \{0\} \times [0,1]$.

D'altronde $f(K_N^\circ)$ è cont. in $f(K_N)$ che è compatto, quindi <u>limitato</u>.

Allora $Y \setminus f(K_N^\circ)$ è illimitato sulle x, sia verso $-\infty$ sia verso $+\infty$.

Cioè $Y \setminus f(K_N^\circ)$ è contenuto nell'unione

$$\left( ]-\infty, 0[\times [0,1] \right) \cup \left( ]0, \infty[\times [0,1] \right)$$

$$\left( ]-\infty, 0[\times [0,1] \right) \cup \left( ]0, \infty[\times [0,1] \right)$$

e interseca entrambi, per cui $Y \setminus f(K_N^\circ)$ è sconnesso.

Allora $f(X \setminus K_N^\circ)$ è sconnesso, assurdo perché $X \setminus K_N^\circ$ è connesso.

Identificazioni

Def.: Siano X, Y spazi topologici, e $f: X \to Y$ continua. Supp. che f sia suriettiva, e diciamo che f è un'identificazione se dato $A \subseteq Y$ qualsiasi, allora A è aperto se e solo se la controimmagine è aperta.

Lemma: Sia $f: X \to Y$ continua e suriettiva.

1) Se f è aperta allora è un'identificazione.
2) Se f è chiusa allora è un'identificazione.

Dim.: 1) Supp. f aperta, sia $A \subseteq Y$. Se A è aperto allora $f^{-1}(A)$ è aperto per continuità. Viceversa, se $f^{-1}(A)$ è aperto, allora $f(f^{-1}(A))$ è aperto per ipotesi. D'altronde

$$f(f^{-1}(A)) = A \cap \underbrace{f(X)}_{= Y,\ f \text{ è suriettiva}} = A.$$

2) ...

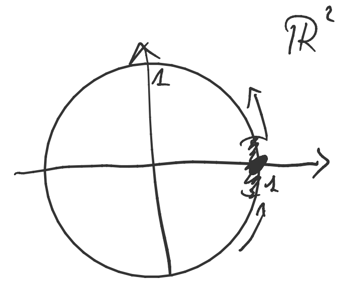
" Y, f è suriettiva

2) esercizio. $\square$

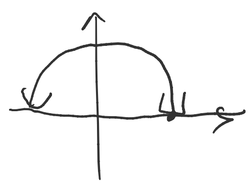
<u>Esempio</u>: 1) Ovviam. se f è un omeomorfismo allora f è un'identificazione.

2) $f: [0,1] \longrightarrow S^1$

$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$



f è suriettiva e continua. Dim. che f è chiusa, usando: un'appl. continua da un compatto in un Hausdorff è chiusa. Allora è un'identificazione. E' un'identificazione chiusa, ma non aperta, ad es. $[0, \frac{1}{2}[$ è aperto in $[0,1]$, ma la sua immagine non è aperta in S^1:



3) Le proiezioni $p_1, p_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono continue, suriettive, aperte, sono identificazioni, ma non sono chiuse.

<u>Lemma</u> (proprietà universale delle identificazioni) Sia $f: X \to Y$ identificazione, e sia $g: X \to Z$ continua. Supponiamo che g sia costante sulle fibre di f, cioè dati $x, x' \in X$ allora se $f(x) = f(x')$ allora anche $g(x) = g(x')$:

allora anche $g(x) = g(x')$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

allora esiste $h : Y \to Z$ tale che $g = h \circ f$, e h è continua.