Geometria 2, Lezione 11

Tuesday, 23 March 2021 12:02

__Proposizione__: Sia X spazio topologico, e siano $K_1, K_2, \dots$ sottospazi di X chiusi, compatti e __non vuoti__. Se $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ allora $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$.

__Dim.__: Supp per assurdo che $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$, e consid. K_1.

Allora abbiamo $K_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (K_1 \setminus K_i)$ e $K_1 \setminus K_i$ è aperto in K_1, perché K_i è chiuso in X (e quindi anche in K_1).

Questo allora è un ricoprim. aperto di K_1, esiste un sottoricoprim. finito:

$$K_1 = (K_1 \setminus K_{i_1}) \cup \dots \cup (K_1 \setminus K_{i_n})$$

per certi indici $i_1, \dots, i_n$. Possiamo assumere $i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Allora $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_n} = \emptyset$, d'altronde $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_n} = K_{i_n}$, otterrei $K_{i_n} = \emptyset$, assurdo. $\square$

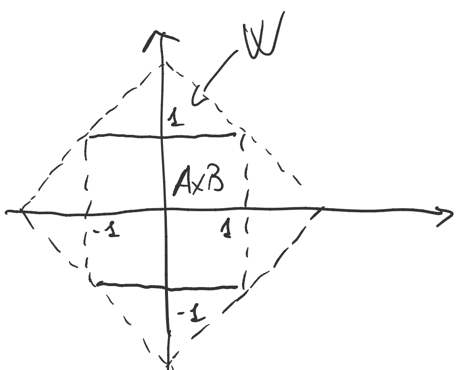
__Teorema di Wallace e conseguenze__

Esempio: Consideriamo il prodotto di due spazi topologici $X \times Y$ ad es. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Consid. $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, e supponiamo che $A \times B$ sia contenuto in un aperto $W \subseteq X \times Y$.
Ci chiediamo se esistono $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ aperti con $U \supseteq A$, $V \supseteq B$, e $U \times V \subseteq W$, cioè

$$A \times B \subseteq \underbrace{U \times V}_{\uparrow \text{aperto}} \subseteq \underbrace{W}_{\uparrow \text{aperto}}.$$

Non è sempre vero, ad es. siano:

$A =]-1, 1[$, $\quad B = [-1, 1]$, $\quad A \times B =$ quadrato „aperto sulle x", „chiuso sulle y"



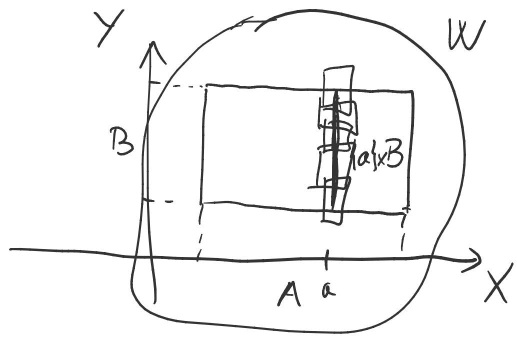
$$W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2 \}$$

In questo caso non esistono U, V aperti come prima.

Teorema (Wallace): Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $W \subseteq X \times Y$ con $A \times B \subseteq W$. Se A e B sono compatti, e W è aperto, allora esistono aperti $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ tali che

$$\boxed{A \times B \subseteq U \times V \subseteq W}.$$

Dim.:



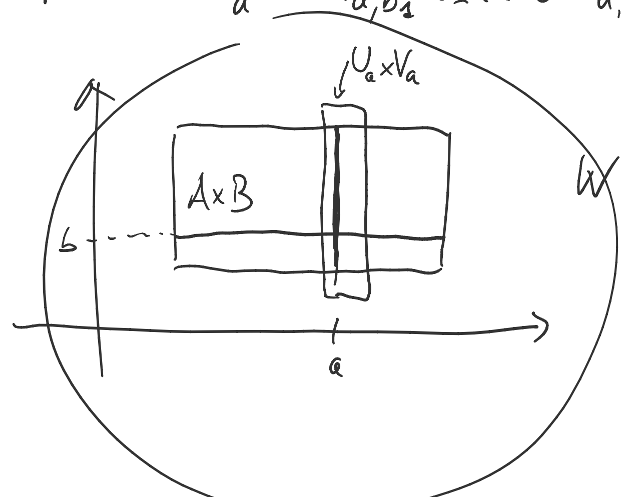
Idea: usare la base solita della topologia prodotto.

Sia $a \in A$ fissato, consid. $\{a\} \times B$. E' omeomorfo a B, quindi è compatto. Consid. anche per ogni $b \in B$ degli aperti $U_{a,b} \times V_{a,b}$ contenuti in W, con $U_{a,b} \subseteq X$ aperto e $V_{a,b} \subseteq Y$ aperto. Visto che $\{ U_{a,b} \times V_{a,b} \mid b \in B \}$ ricopre $\{a\} \times B$, esiste un sottoricoprim. finito, cioè esistono $b_1, \dots, b_n \in B$ tali che

$$\{a\} \times B \subseteq \left(U_{a,b_1} \times V_{a,b_1}\right) \cup \dots \cup \left(U_{a,b_n} \times V_{a,b_n}\right).$$

Allora poniamo $U_a = U_{a,b_1} \cap \dots \cap U_{a,b_n}$, è ap. in X e contiene a.

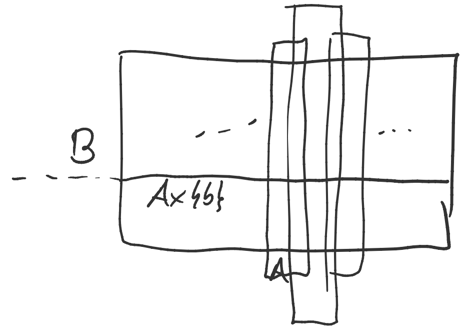
E poniamo $V_a = V_{a,b_1} \cup \dots \cup V_{a,b_n}$. E' aperto in Y e contiene B.



Cioè $U_a \times V_a$ contiene $\{a\} \times B$, ed è definito $\forall a \in A$.

Fissiamo ora $b \in B$, e osserviamo che $A \times \{b\}$ è contenuto in $\bigcup \left(U_a \times V_a\right)$:

in $\bigcup_{a \in A} (U_a \times V_a)$;



Visto che $A \times \{b\}$ è omeomorfo ad A, esiste un sottoricoprim. finito, cioè esistono $a_1, \dots, a_m \in A$ tali che

$$A \times \{b\} \subseteq (U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup \dots \cup (U_{a_m} \times V_{a_m}) \quad \forall b.$$

Poniamo allora $U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$, $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m}$.

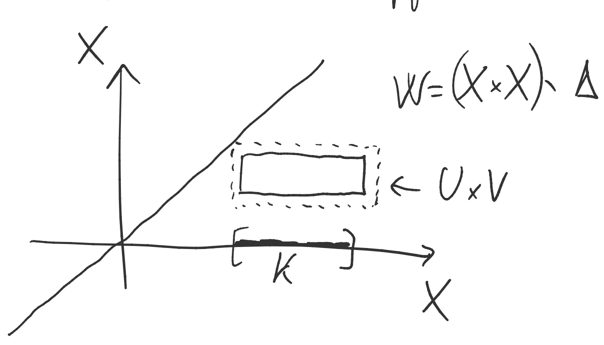
Otteniamo $A \times \{b\} \subseteq U \times V \subseteq W \quad \forall b \in B$, cioè

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq W.$$

$\square$

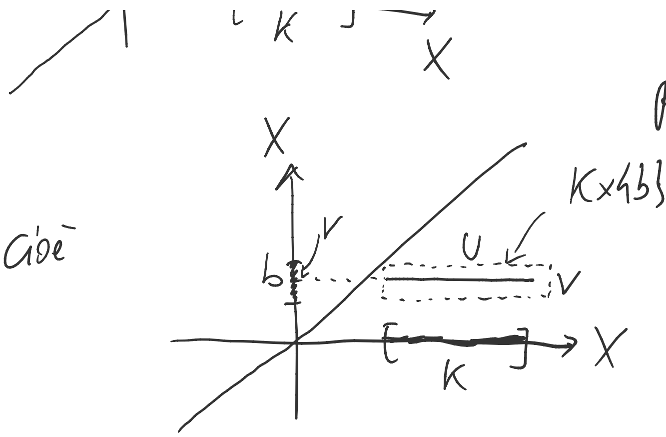
<u>Corollario</u>: Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

<u>Dim.</u>: Sia X di Hausdorff, e $K \subseteq X$ un compatto. Ricordiamo: la diagonale Δ è chiusa nel prodotto $X \times X$. Consideriamo allora $W = (X \times X) \setminus \Delta$, aperto di $X \times X$. Per applicare il teo. di Wallace poniamo $A = K$:



Sia $b \in X \setminus K$. Allora $K \times \{b\}$ è come nel teorema, perché $B = \{b\}$ è compatto perché $B=\{b\}$ è compatto.

cioè



Visto che $b \notin K$, allora $K\times\{b\}$ non interseca Δ.

Siamo quindi nelle ipotesi del teorema, esistono aperti $U\subseteq X$, $V\subseteq X$ con $U\supseteq K$, $V\supseteq\{b\}$ e $U\times V\subseteq (X\times X)\setminus\Delta$.

Per lo stesso rag. di prima, U e V sono disgiunti, in particolare V è un intorno di b e non interseca K ($\subseteq U$). Allora $X\setminus K$ è intorno di ogni suo punto, quindi $X\setminus K$ è aperto, e K è chiuso.

$\square$

<u>Lemma</u>: Sia $f: X\to Y$ appl. continua fra spazi topologici. Se X è compatto, e Y è di Hausdorff, allora f è chiusa.

<u>Dim.</u>: Sia $C\subseteq X$ chiuso. Allora C è compatto perché X lo è. Segue: $f(C)$ è compatta, in un Hausdorff (Y) quindi $f(C)$ chiusa.

$\square$

<u>Corollario</u> (del lemma) Sia $f: X\to Y$ continua, <u>biiettiva</u>, X compatto, Y di Hausdorff. Allora f è un omeomorfismo.

Dim.: f è chiusa per il lemma, essendo biiettiva è anche aperta, Dim.: f è chiusa per il lemma, essendo biiettiva è anche aperta, cioè f^{-1} è continua.

$\square$

Corollario (del teorema): Sia X spazio topologico. Se X è compatto allora per ogni altro spazio topologico Y la proiezione

$$
\begin{aligned}
p_2 : X \times Y &\longrightarrow Y \\
(x,y) &\longmapsto y
\end{aligned}
$$

è chiusa.

Oss.: La proprietà di X della tesi del corollario si esprime anche dicendo che X è universalmente chiuso.

Dim.: Sia $C \subseteq X \times Y$ chiuso. Vogliamo dim. che $p_2(C)$ è chiuso in Y.
Se $p_2(C) = Y$ allora è chiuso e abb. finito. Supp. che $p_2(C) \subsetneq Y$, e dim. che $Y \setminus p_2(C)$ è intorno di ciascun suo punto.
Sia $y \in Y \setminus p_2(C)$. Abb.: X compatto, $\{y\}$ è compatto, e:

$$X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus C$$

perché y non appartiene a $p_2(C)$, cioè non c'è alcuna coppia $(x,y) \in C$ con $x \in X$. Applichiamo il teorema di Wallace, ottenendo $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ aperti, con $U \supseteq X$, $V \supseteq \{y\}$, $U \times V \subseteq (X \times Y) \setminus C$.

$V \subseteq Y$ aperti, con $U \supseteq X$, $V \ni \{y\}$, $U \times V \subseteq (X \times Y) \setminus C$.
Ovviam. $U = X$, cioè $X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus C$.

Allora per lo stesso motivo di prima V non interseca $p_2(C)$.
Cioè V è un intorno di y tutto cont. in $Y \setminus p_2(C)$, segue $Y \setminus p_2(C)$ è aperto, cioè $p_2(C)$ chiuso.

$\square$

Corollario: Se X e Y sono compatti allora $X \times Y$ è compatto.

Dim.: Usiamo $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$: è continua, Y è compatto, per ogni $y \in Y$ abb. $p_2^{-1}(y) = X \times \{y\}$ è omeomorfo a X quindi è compatto. Per usare il risultato già visto abb. bisogno che p_2 sia anche chiusa. Questo segue dal corollario precedente, perché X è compatto. Allora anche il dominio di p_2 è compatto, cioè $X \times Y$.

$\square$

Es.: $[0,1]^n$ con $n \geq 1$ è compatto

(es. $[0,1]^2$ = quadrato chiuso in $\mathbb{R}^2$
$[0,1]^3$ = cubo chiuso in $\mathbb{R}^2$ ...)

Esempi ed esercizi

Esercizio per casa: Siano $f, g : X \to Y$ applicaz. continue fra spazi topologici.

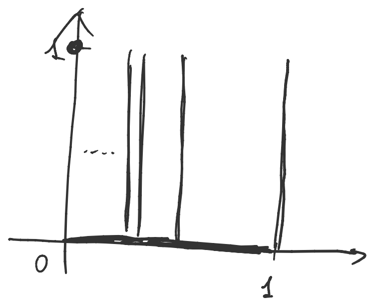
Supp. che $f|_A$ coincida con $g|_A$ dove $A \subseteq X$ è denso, cioè $f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$. Dimostrare: se Y è di Hausdorff, allora $f = g$ (cioè coincidono su tutto X).

Esercizio per casa: Consid. $X = \mathbb{Z}_{>0}$. Siano $a, b \in X$ con $MCD(a,b) = 1$ definiamo $N_{a,b} = \{ a + kb \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$. Dimostrare:

1) $\{ N_{a,b} \mid a, b \in X, MCD(a,b) = 1 \}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su X.
2) X con la top. $\mathcal{T}$ è di Hausdorff.
3) Per ogni a, b come sopra, $b \in \overline{N_{a,b}}$.
4) Per ogni coppia A, A' di aperti non vuoti abb $\overline{A} \cap \overline{A'} \neq \emptyset$.
5) $\mathcal{T}$ non è metrizzabile, cioè non esiste alcuna distanza su X di cui $\mathcal{T}$ sia la topologia indotta.

Esempio: Consid. l'insieme X già visto connesso ma non connesso per

Esempio: Consid. l'insieme X già visto connesso ma non connesso per archi:



$$X = \left([0,1]\times\{0\}\right) \cup \left\{ \left(\tfrac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, \begin{matrix} n\in\mathbb{Z}_{>0} \\ y\in[0,1[\end{matrix} \right\} \cup \{(0,1)\}$$

Dim. che non è connesso per archi. Sia per assurdo $\alpha:[0,1]\to X$ continua con $\alpha(0)=(0,1)$ e $\alpha(1)=(1,0)$.

Sia $X' = \left\{\left(\tfrac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}_{>0},\ y\in\,]0,1[\,\right\} \cup \{(0,1)\}$

Consid. $\alpha^{-1}(X')$. Abb. X' è aperto in X, perché $X' = X \cap (\mathbb{R}\times\,]0,2[\,)$, allora $\alpha^{-1}(X')$ è aperto in $[0,1]$.

E' un aperto proprio, quindi il complementare $[0,1]\setminus\alpha^{-1}(X')$ è un chiuso non vuoto di $[0,1]$.

Consid. $\inf\left([0,1]\setminus\alpha^{-1}(X')\right)$: è il primo valore del param. tale che $\alpha\in$ „base del pettine". D'altronde è un minimo:

$h = \min [0,1]\setminus\alpha^{-1}(X')$.

Allora $\alpha(h)\in[0,1]\times\{0\}$, mentre $\alpha([0,h[)\subseteq X'$.

Inoltre $\alpha([0,h[)$ è connesso. Proiettiamolo sulle x con la prima proiezione $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Abb.: $p_1(X')=$

prima proiezione $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Abb.: $p_1(X') = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Inoltre $p_1(\alpha([0,h[))$ contiene 0 ed è connesso in $\mathbb{R}$, contenuto in $p_1(X')$. Segue: $p_1(\alpha([0,h[)) = \{0\}$, e allora $\alpha([0,h[) = \{(0,1)\}$. Invece $\alpha(h)$ è un punto del tipo $(x, 0)$: impossibile se α è continua. $\square$

<u>Esercizi per casa</u>: 1) Sia X spazio topologico, e sia $\mathcal{B}$ base. Dimostrare: se ogni ricoprim. aperto di X <u>fatto con aperti di $\mathcal{B}$</u> ammette un sottoric. finito, allora X è compatto.

2) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora X è compatto se e solo se è chiuso e limitato.
In particolare $S^n \, (\subseteq \mathbb{R}^{n+1})$ è compatta $\forall n \geq 0$.

<u>Esempio</u>: $GL(n, \mathbb{R}) = \{ \underset{\text{a entrate in } \mathbb{R}}{A \text{ matrice } n \times n} \mid \det(A) \neq 0 \}$ $(n \geq 1)$

Oss.: si tratta di un <u>gruppo topologico</u>, cioè di un gruppo G che è anche uno spazio topologico (in questo caso con top. di sottospazio indotta da quella euclidea sull'insieme delle matr. $n \times n$

sottospazio indotta da quella euclidea sull'insieme delle matr. $n \times n$ identif. con $\mathbb{R}^{n^2}$), tale che l'operazione di gruppo

$$\begin{array}{ccc} G \times G \longrightarrow G & \text{e l'inversa} & G \longrightarrow G \\ (g,h) \longmapsto gh & & g \longmapsto g^{-1} \end{array}$$

siano applicazioni continue.

Vediamo che $GL(n,\mathbb{R})$ <u>non</u> è connesso: infatti

$\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\} = \det^{-1}(]0,+\infty[)$ e

$\{A \in$ —,— $\mid \det(A) < 0\} = \det^{-1}(]-\infty, 0[)$

sono aperti disgiunti propri la cui unione è $GL(n,\mathbb{R})$.

<u>Esercizio per casa:</u> $\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$ è connesso.

<u>Suggerimento:</u> Dim. che è connesso per archi, collegando prima di tutto una A qualsiasi ad una A' con $\det(A') = 1$. Cioè $A' \in SL(n,\mathbb{R})$. Dim. poi che $SL(n,\mathbb{R})$ è connesso per archi, usando le matrici elementari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & \boxed{a} & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

cioè le matrici $E_{ij}(a)$ che hanno entrate come la matrice identità, tranne che al posto (i,j) dove c'è a

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \quad & 1 \end{pmatrix} \\ j \end{array}$$

matrice identità, tranne che al posto (i,j) dove c'è a.