Geometria 2, Lezione 10

Monday, 22 March 2021 08:41

Spazi topologici compatti

Def.: Sia X uno spazio topologico, sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- $\mathcal{R}$ si dice <u>ricoprimento</u> se $X = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$.

- Se $\mathcal{R}$ è un ricoprimento, si dice <u>ricoprimento aperto</u> se ogni $A \in \mathcal{R}$ è aperto.

- Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, allora $\mathcal{S}$ si dice <u>sottoricoprimento</u> di $\mathcal{R}$ se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.

Def.: Sia X sp. topologico. X si dice <u>compatto</u> se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Es.: 1) Se X è finito, allora è compatto (perché $\mathcal{P}(X)$ è finito, quindi <u>ogni</u> ricoprimento è finito).

2) Se X ha topologia banale è compatto (la topologia è finita).

3) Se X è infinito e ha top. discreta allora non è compatto

pure 1.

3) Se X è infinito e ha top. discreta allora non è compatto, perchè $\mathcal{R} = \{ \underbrace{\{x\}}_{} \mid x \in X \}$ è un ricoprimento aperto ma

aperti in top. discreta

non ammette sottoricoprimenti finiti.

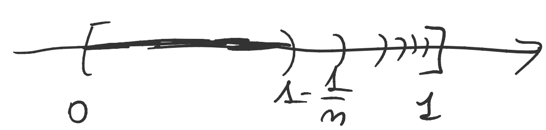
4) $\mathbb{R}^n$ (con top. euclidea) non è compatto, ad esempio

$$\mathcal{R} = \{ B(0,n) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$ è un ricoprimento aperto

che non ammette sottoricoprimenti finiti.

5) Sia $\mathbb{R}$ con top. di Sorgenfrey (base $= \{ [a,b[\mid a<b \}$)

Allora $[0,1]$ (con top. di sottospazio) <u>non</u> è compatto (anche se lo sarebbe in top. euclidea), ad es.



$$\mathcal{R} = \{ \underbrace{[0, 1-\tfrac{1}{n}[}_{} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \} \cup \{ \underbrace{\{1\}}_{} \}$$

aperti in $[0,1]$ sia per la top. di Sorgenfrey sia per quella euclidea

$\{1\} = [0,1] \cap [1,2[$ quindi è ap in $[0,1]$ per la top. di Sorgenfrey

è un ricoprimento aperto che però non ammette sottoricoprim. finiti è un ricoprimento aperto che però non ammette sottoricoprim. finiti.

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to Y$ continua, sia X compatto, allora $f(X)$ è compatto.

<u>Dim.</u>: Sia $\mathcal{R}$ ricoprim aperto di $f(X)$ (ovviam. $f(X)$ ha top. di sottosp. indotta da Y). Allora $f^{-1}(A)$ aperto in X $\forall A \in \mathcal{R}$ (perché posso rimpiazzare Y con $f(X)$).
Inoltre $\mathcal{S} = \{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{R} \}$ è un ricoprim. aperto di X, quindi esiste $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \mathcal{S}$ sottoricopr. finito di X, siano $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ tali che $B_i = f^{-1}(A_i)$, allora $\{A_1, \dots, A_n\}$ è un sottoricoprim. finito di $\mathcal{R}$. $\square$

<u>Teorema</u>: $[0,1]$ è compatto.

<u>Dim.</u>: Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di $[0,1]$, per ogni elem. A di $\mathcal{R}$ scegliamo un elem. $A' \subseteq \mathbb{R}$ aperto tale che $A = A' \cap [0,1]$, e chiamiamo $\mathcal{S}$ l'insieme degli A'. Allora

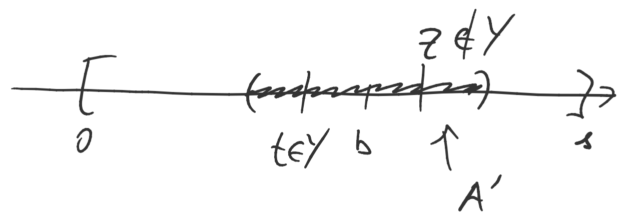
$$[0,1] \subseteq \bigcup_{A' \in \mathcal{S}} A'.$$

Consid. $Y = \{ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid [0,t]$ è contenuto in un numero finito di elem. di $\mathcal{S} \}$

ad es. $0 \in Y$, perchè $[0,0] = \{0\}$ è contenuto in un elem. di $\mathcal{S}$.

Possiamo considerare $\inf(\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus Y) = b$. Se $b > 1$ allora $[0,1]$ è ricopribile da un numero finito di elem. di $\mathcal{S}$ (perchè allora esistono t con $t > 1$, $t < b$ tali che $[0,t]$ è ricopribile da un num. finito di aperti di $\mathcal{S}$).

Allora supp. $b \leq 1$, e



sia $A' \in \mathcal{S}$ tale che $A' \ni b$.

Visto che b è l'inf di $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus Y$, esiste $z \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus Y$ tale che $z > b$, $z \in A'$. D'altronde ogni elem. di $[0, b[$ è contenuto in Y, possiamo scegliere $t < b$ con $t \in A'$.

A questo punto sappiamo che $[0,t]$ è ricoperto da un numero finito di elt di $\mathcal{S}$, mettiamo $A'_1, \ldots, A'_n$. Allora

$A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \cup A' \supseteq [0,z]$, cioè $z \in Y$: assurdo. $\square$

$A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \cup A' \supseteq [0,7]$, cioè $z \in Y$: assurdo. $\square$

<u>Oss.</u>: Come la connessione, anche la compattezza si usa per dim. che due spazi top. non sono omeomorfi. Ad es. $[0,1]$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}$, perché $[0,1]$ è compatto e $\mathbb{R}$ no.

<u>Oss.</u>: C'è una relazione fra essere chiuso (in uno spazio „ambiente") ed essere compatto:

- un chiuso in un compatto è compatto
- un compatto in un Hausdorff è chiuso.

Vedremo entrambe. Le due ipotesi „aggiuntive" sono necessarie: ad es. $[0,+\infty[$ è chiuso in $\mathbb{R}$ ma non è compatto, e se X ha topologia banale, tutti i suoi sottospazi hanno top. banale e quindi sono compatti, ma se $|X| \geq 2$ allora ha sottoinsiemi non chiusi.

<u>Proposizione</u>: 1) Sia Y sottospazio di uno sp. top X: se X è compatto e Y è chiuso in X, allora Y è compatto.

2) Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ sottospazi di X ($\leftarrow$ qualsiasi), se Y_i compatto $\forall i$ allora $Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ è compatto.

Dim.: 1) Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di Y, per ogni $A \in \mathcal{R}$ scegliamo B_A aperto di X tale che $A = Y \cap B_A$. Allora $Y \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{R}} B_A$.

D'altronde $X \setminus Y$ è aperto, per cui

$\mathcal{S} = \{ B_A \mid A \in \mathcal{R} \} \cup \{ X \setminus Y \}$ è un ricoprim. aperto di X,

quindi esiste un sottoricoprim. finito $B_{A_1}, \dots, B_{A_n}, \underbrace{X \setminus Y}_{\text{eventualm. fa parte del sottoricoprimento}}$

e segue $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, cioè Y compatto.

2) esercizio.

$\square$

Corollario: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$; X compatto $\iff$ X chiuso in $\mathbb{R}$ e limitato

Dim.: $\Rightarrow$) Supp X compatto, allora

$$X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}]-n, n[$$

Questi intervalli intersecati con X producono un ricoprim. aperto, esiste un sottoricoprim. finito, quindi X è limitato.

un sottoricoprim. finito, quindi X è limitato.

Dim. che X è anche chiuso: sia $y \in \overline{X}$ (chiusura in $\mathbb{R}$).

Supponiamo per assurdo che $y \notin X$, e consid.

$$f: X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x-y}$$ (y fissato)

è ben def. e continua, e $f(X)$ non è limitata perché $y \in \overline{X}$. Ma $f(X)$ è compatta, e sappiamo che i compatti di $\mathbb{R}$ sono limitati; assurdo.

Segue: X chiuso.

$\Leftarrow$) Visto che X è limitato, esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che

$X \subseteq [-n, n]$, e $[-n,n]$ è omeomorfo a $[0,1]$ e quindi è compatto. Allora X è chiuso in un compatto, quindi è compatto.

$\square$

<u>Corollario</u>: Se X è compatto e $f: X \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha minimo e massimo.

<u>Dim.</u>: $f(X)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. $\square$

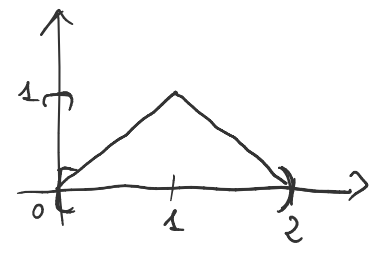
<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to Y$ continua e chiusa, Y compatto, $f^{-1}(y)$ compatto $\forall y \in Y$.

Allora X è compatto.

Allora X è compatto.

<u>Oss.</u>: Il teorema è analogo a un risultato che abb. visto per la connessione.
Però qui non andrebbe bene supporre f aperta invece che chiusa:

ad es.

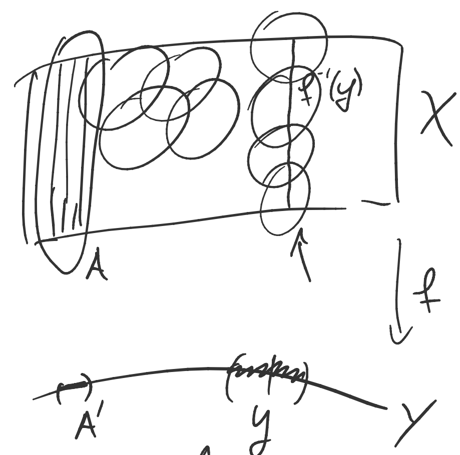


$$f: [0,2[\longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{se } x \in]1,2[\end{cases}$$

f è continua, <u>aperta</u>, $Y = [0,1]$ è compatto, $f^{-1}(y) = \begin{cases} \{\text{un elem.}\} & \text{oppure} \\ \{\text{due elem.}\} \end{cases}$

↖ esercizio

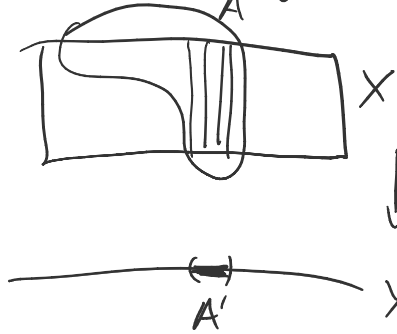
però $X = [0,2[$ non è compatto.



<u>Dim.</u>: Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di X.

Sia $A \in \mathcal{R}$. Definiamo

$$A' = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A \}$$



Allora

$$Y \setminus A' = \{ z \in Y \mid f^{-1}(z) \not\subseteq A \} =$$

$$= \{ z \in Y \mid \text{esistono } x \in X \setminus A \text{ con } f(x) = z \}$$

$$= f(X \setminus A)$$

$= f(X \setminus A)$

Visto che A è aperto, $X \setminus A$ chiuso, f <u>chiusa</u>, allora $Y \setminus A'$ è chiuso, quindi A' è aperto.

Definiamo ora $\mathcal{R}_0$ la famiglia delle unioni di un numero finito di elem. di $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}_0$ è un ricoprim. aperto di X, inoltre $\forall y \in Y$ abb. $f^{-1}(y)$ è compatto, quindi esistono un numero finito di elem. di $\mathcal{R}$ che ricoprono $f^{-1}(y)$, quindi esiste un elemento B_y di $\mathcal{R}_0$ che contiene $f^{-1}(y)$.

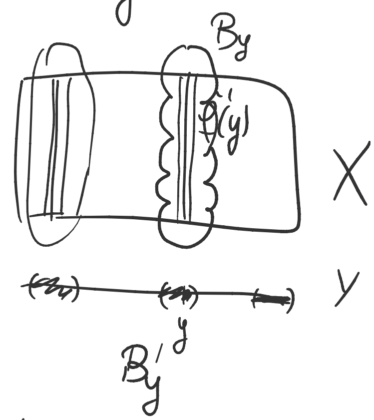


Abb.: B'_y è aperto in Y e contiene y.

Allora $\{ B'_y \mid y \in Y \}$ è un ricoprim. aperto di Y. Esiste un sottoricoprim. finito $B'_{y_1}, \dots, B'_{y_n}$.

Allora $B_{y_1}, \dots, B_{y_n}$ contengono $f^{-1}(y)$ per <u>ogni</u> $y \in Y$, cioè ricoprono X. Ciascun B_{y_i} è unione finita di elem di $\mathcal{R}$, per cui $\mathcal{R}$ ammette un sottoricoprim. finito.

$\square$

<u>Es.</u>: $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto perché non è chiuso, ad es.

Es.: $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto perché non è chiuso, ad es.

scegliamo un irrazionale $\xi \in [0,1]$, e consid.

$$\left\{ \left(\left[0, \xi - \tfrac{1}{n}\right[\ \cup \ \left]\xi + \tfrac{1}{n}, 1\right] \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \right\}$$

tale che gli intervalli sono definiti

è un ricoprim. aperto da cui non posso estrarre un sottoricoprim. finito.