Geometria 2, Lezione 1

Monday, 22 February 2021 11:55

https://www1.mat.uniroma1.it/people/pezzini/didattica/GII2021/GeometriaII2021.html

Introduzione

Il corso è diviso in 3 parti:

1) Topologia generale
2) Topologia algebrica
3) Curve e superfici

Introduzione alla topologia generale

Scopo: studiare e formalizzare proprietà geometriche (anche intuitive) di figure (= sottoinsiemi) di $\mathbb{R}^n$.

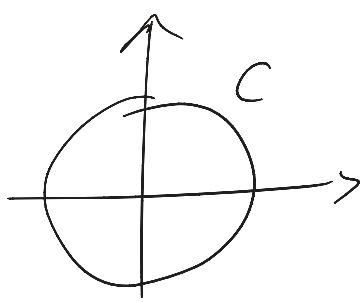
Applicheremo poi le stesse costruzioni in altri ambiti (es. algebra).

ambiti (es. algebra).

Classe principale di applicazioni che considereremo: <u>funzioni continue</u>.

<u>Esempio:</u>

Consideriamo due figure in $\mathbb{R}^2$:



cerchio: $x^2+y^2=1$

iperbole: $xy=1$

Domanda: esiste una biiezione $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f(C)=I$?

Risposta: NO, ci sono „molti modi per dimostrarlo"

1) usando la teoria delle forme quadratiche

1) usando la teoria delle forme quadratiche

2) usando la norma dei vettori, visto che C è limitata, I no.

3) C è "un pezzo solo", I "due pezzi".

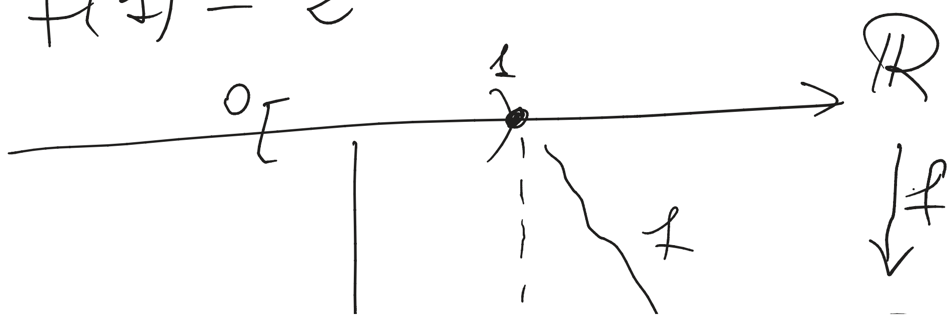
Se facessi la stessa domanda richiedendo solo f <u>continua</u>, potrei usare solo la strategia n. 3.

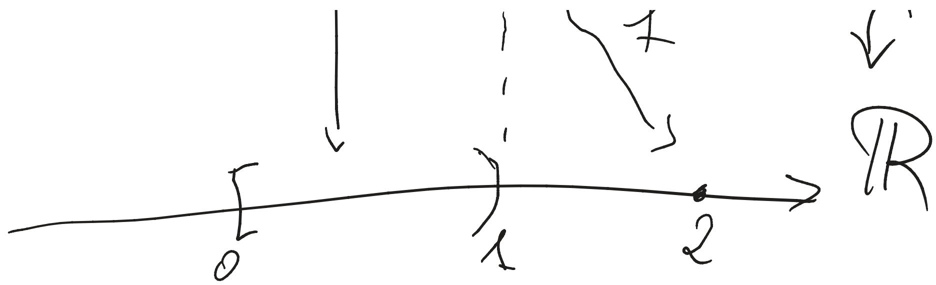
<u>Esempio</u>:

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,2]$$

$$f(x) = x \quad \text{se } x \in [0,1[$$

$$f(1) = 2$$





f non è continua, perchè $[0,1[$ contiene punti arbitrariam. vicini a 1, ma $f([0,1[)$ non contiene punti arbitrariam. vicini a $f(1)$.

Def.: Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$.
Allora p si dice aderente a X se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X$ tale che
$\|p - x\| < \varepsilon$

Proposizione: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sono equivalenti:

equivalenti:

1) f è continua

2) se $p \in \mathbb{R}^n$ è aderente a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $f(p)$ è aderente a $f(X)$.

Prima di finire la prop., vediamo qualche altro richiamo:

<u>Def.</u>: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>chiuso</u> se contiene ogni punto di $\mathbb{R}^n$ aderente a C.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>aperto</u> se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso.

<u>Oss.</u>: questa coincide con la def. „classica" di aperto di $\mathbb{R}^n$. Infatti se un s.i.

aperto di $\mathbb{R}$. Infatti se un s.i. A di $\mathbb{R}^n$ contiene un punto $x \in A$, richiedere che A contenga anche tutti i punti vicini a x (fissata una certa distanza) è equivalente a richiedere che x non sia aderente a $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Es.: Dato $p \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, la "palla aperta"

$$\{q \in \mathbb{R}^n \mid \|p-q\| < r\}$$

è aperto. (Dim.: esercizio).

Fine dell'enunciato della proposizione:

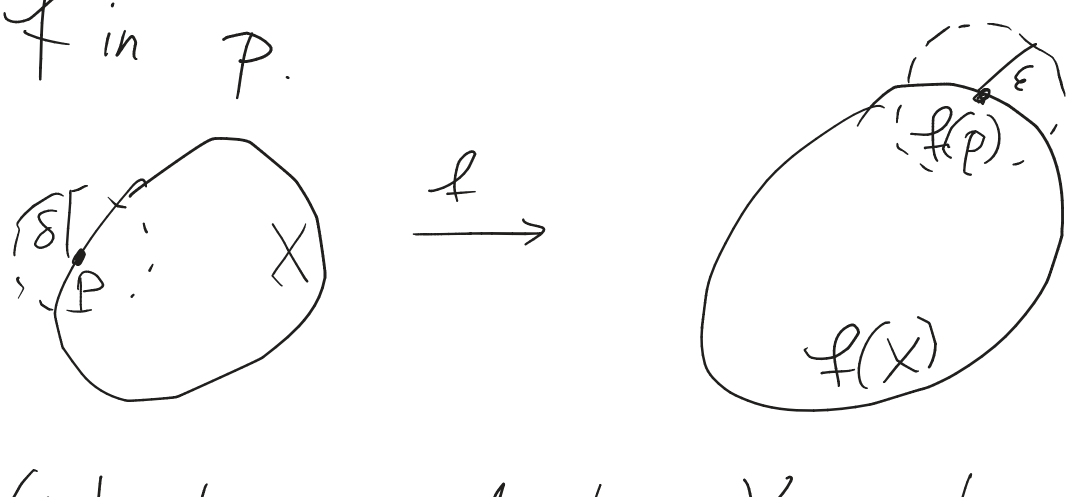
1) e 2) della prop. sono anche equivalenti a

m

equivalenti a

3) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto:
$f^{-1}(A)$ è aperto.

Dim.: $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Sia $p \in \mathbb{R}^n$ aderente a $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dim. che $f(p)$ è aderente a $f(X)$. Cioè, sia $\varepsilon > 0$, dobb. trovare punti di $f(X)$ a distanza $< \varepsilon$ da $f(p)$.
Prendiamo $\delta > 0$ della def. di continuità di f in p.



Visto che p è aderente a X, esiste $x \in X$

Visto che p è aderente a X, esiste $x \in X$ tale che $\|p - x\| < \delta$.

Per continuità $\|f(p) - \underset{\substack{\cap \\ f(X)}}{f(x)}\| < \varepsilon$.

Quindi $f(p)$ è aderente a $f(X)$.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto.

Dobb. dim. che, se $p \in \mathbb{R}^n$ è aderente a $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A)$, allora $p \notin f^{-1}(A)$.

Vale: $\boxed{f(p)}$ è aderente a

$$\underbrace{f\left(\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A)\right)} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^m \setminus A}$$

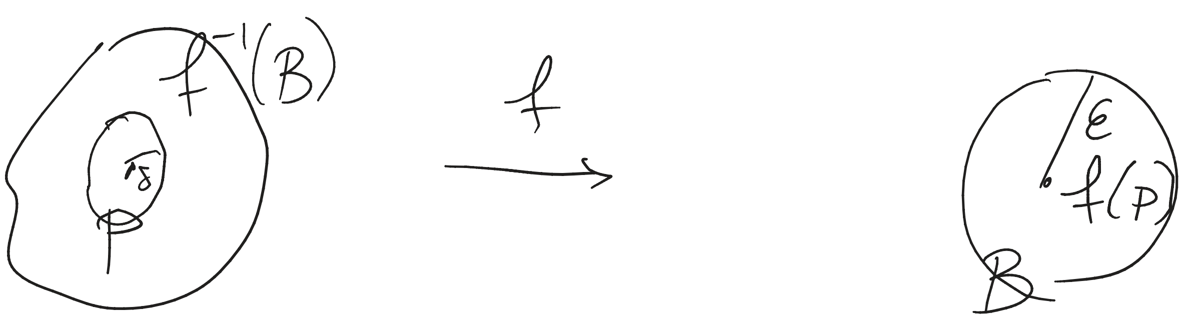
att., rifarsi
il ragionamento!

Allora $f(p)$ è aderente anche a $\mathbb{R}^m \setminus A$.

Per ipotesi, $f(p) \notin A$.

Allora $p \notin f^{-1}(A)$.

3) $\Rightarrow$ 1) | Dim. che f è continua in ogni $p \in \mathbb{R}^n$.



Sia $\varepsilon > 0$, considero

$$B = \{ q \in \mathbb{R}^m \mid \|q - f(p)\| < \varepsilon \}$$

Per ipotesi $f^{-1}(B)$ è aperto.

Per ipotesi $f^{-1}(B)$ è aperto.
Cioè esiste $\delta > 0$ tale che se $p' \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $\|p - p'\| < \delta$ allora $p' \in f^{-1}(B)$.
Cioè $\| f(p') - f(p) \| < \varepsilon$.

$\square$

Omeomorfismi

Def.: Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ sia $f : X \longrightarrow Y$. Allora f si dice omeomorfismo se:

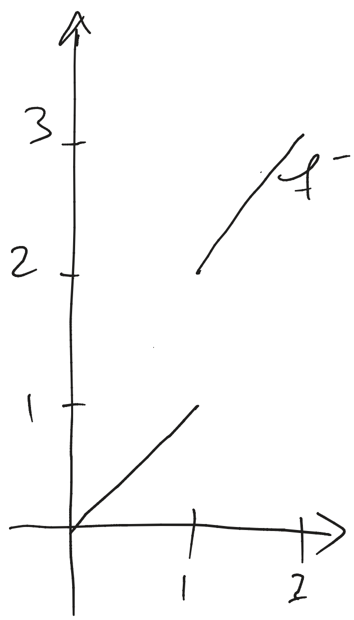
1) f biiettiva
2) f continua
3) f^{-1} continua

Oss.: Nell'analogia con gli isomorfismi fra gruppi, anelli spazi vett., ecc..... la condizione 3) anelli, spazi vett, ecc...., la condizione 3) di solito non si richiede. Qui invece è necessaria:

Es.: $f: [0,1] \cup]2,3] \longrightarrow [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

f è continua e biiettiva, ma f^{-1} non è continua.



Esempi: 1) $]a,b[$ è omeomorfo a $]c,d[$ $\forall a<b, c<d$

$]c, d[$

tramite ad es.

$$x \longmapsto (x-a)\frac{d-c}{b-a} + c$$

2) $]0,1[$ è omeomorfo a $]0,+\infty[$

ad es. $]0,+\infty[\longrightarrow]0,1[$

$$x \longmapsto e^{-x}$$

3) $]0,+\infty[$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$

ad es. $x \longmapsto \log(x)$

4) $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1]$.

(Senza dim.)

<u>Teorema</u>: $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$ se e solo se $n = m$.