Esercizio 1. Sia $A = [-1, 1[$. Trovare tre sottospazi $X_1, X_2, X_3 \subseteq \mathbb{R}$ contenenti A, tali che

(1) A è aperto e chiuso in X_1,
(2) A è aperto ma non chiuso in X_2,
(3) A è chiuso ma non aperto in X_3.

Svolgimento. (1) Per avere A aperto e chiuso in X_1 basta prendere $X_1 = A$.

(2) Prendiamo $X_2 = [-1, 2]$. Allora A è aperto in X_2, perché $A = X_2 \cap]-2, 1[$. Inoltre A non è chiuso in X_2, perché il punto 1 è in X_2, è aderente ad A, ma non è in A.

(3) Prendiamo $X_3 = [-2, 1[$. Allora A è chiuso in X_3, perché $A = X_3 \cap [-1, 1]$. Inoltre A non è aperto in X_3, perché il punto -1 è in A ma è aderente a $X_3 \setminus A$, quindi A non è un intorno di -1 in X_3.

□

Esercizio 2. Sia X spazio topologico, $S \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi, e consideriamo la funzione caratteristica di S, cioè

$$\begin{aligned} f\colon \quad X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dimostrare che f è continua in un punto $x \in X$ se e solo se $x \notin \partial S$.

Svolgimento. Sia $x \in X$, supponiamo che f sia continua in x, dimostriamo che $x \notin \partial S$. Supponiamo $f(x) = 0$, cioè $x \notin S$. Osserviamo che $]-1, 1[$ è un intorno di $f(x)$ in $\mathbb{R}$ e, per la continuità in x, esiste un intorno U di x in X tale che $f(U) \subseteq]-1, 1[$. Allora $f(U) = \{0\}$, e questo vuol dire che U non interseca S. Cioè x non appartiene alla chiusura di S, per cui $x \notin \partial S$.

Supponiamo ora che $f(x) = 1$, cioè $x \in S$. Osserviamo che $]0, 2[$ è un intorno di $f(x)$ in $\mathbb{R}$, e per la continuità in x, esiste un intorno U di x in X tale che $f(U) \subseteq]0, 2[$. Allora $f(U) = \{1\}$, e questo vuol dire che U è tutto contenuto in S. Cioè x appartiene alla parte interna di S, per cui $x \notin \partial S$.

Viceversa, supponiamo adesso che $x \notin \partial S$, e dimostriamo che f è continua in x. Ci sono due possibilità: o abbiamo $x \notin \overline{S}$, oppure $x \in S^\circ$. Supponiamo $x \notin \overline{S}$, cioè esiste un intorno U di x disgiunto da S. Inoltre $f(x) = 0$. Sia $V \subseteq \mathbb{R}$ un intorno qualsiasi di 0, e osserviamo che $f(U) = \{0\}$ è contenuto in V, per cui f è continua in x.

Se invece $x \in S^\circ$, allora esiste un intorno U di x tutto contenuto in S. Inoltre $f(x) = 1$. Sia $V \subseteq \mathbb{R}$ un intorno qualsiasi di 1, e osserviamo che stavolta $f(U) = \{1\}$, per cui di nuovo $f(U)$ è contenuto in V, ed f è continua in x. □

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico compatto, e sia $K \subseteq X$ un chiuso che come sottospazio è discreto. Dimostrare che K è un insieme finito.

Svolgimento. Visto che K è un sottospazio discreto, per ogni $x \in K$ abbiamo $\{x\}$ aperto in K. Allora esiste $A_x \subseteq X$ aperto di X, tale che $A_x \cap K = \{x\}$. Osserviamo che tutti gli A_x al variare di x in K ricoprono K: se ci aggiungiamo anche $X \setminus K$, che è aperto, otteniamo tutto X. In altre parole

$$\mathcal{R} = \{X \setminus K\} \cup \{A_x \mid x \in K\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Sappiamo che $\mathcal{R}$ ammette un sottoricoprimento finito, per cui possiamo dire che esiste un numero finito di elementi di K, mettiamo $x_1, \dots, x_n$, tali che

$$\{X \setminus K\} \cup \{A_{x_1}\} \cup \ldots \cup \{A_{x_n}\}$$

è un ricoprimento di X. Ora, un qualsiasi $x \in K$ deve stare in almeno uno di questi insiemi: non può essere il primo, e quindi $x \in A_{x_i}$ per qualche i. Dato che $K \cap A_{x_i} = \{x_i\}$, segue $x = x_i$, cioè $K = \{x_1, \dots, x_n\}$, cioè K è un insieme finito. □

Esercizio 4. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici. Supponiamo X separabile e f suriettiva. Dimostrare che allora Y è separabile.

Svolgimento. Sia $E \subseteq X$ sottoinsieme denso numerabile. La sua immagine $f(E)$ è numerabile, dimostriamo che è densa in Y; da questo seguirà che Y è separabile. Sia $A \subseteq Y$ un aperto non vuoto. Allora la sua controimmagine $B = f^{-1}(A)$ è non vuota perché f è suriettiva, ed è aperta per continuità. Visto che E è denso in X, sicuramente interseca l'aperto non vuoto B. Da questo segue che $f(E)$ interseca A. Cioè abbiamo dimostrato che $f(E)$ interseca ogni aperto non vuoto di Y, per cui è denso. □

Esercizio 5. Uno spazio topologico X si dice *localmente compatto* se ogni punto ha un intorno compatto[1]. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è localmente compatto.

Svolgimento. Sia $q \in \mathbb{Q}$ e sia per assurdo U un intorno compatto di q in $\mathbb{Q}$. Allora U contiene un aperto di $\mathbb{Q}$ contenente q, cioè U contiene un insieme del tipo $A \cap \mathbb{Q}$ dove A è un aperto di $\mathbb{R}$ in topologia euclidea, e $q \in A$. Sappiamo anche che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[$ è tutto contenuto in A, quindi U contiene l'intersezione $\mathbb{Q}\cap\,]q-\varepsilon, q+\varepsilon[$. Sia ora ξ un irrazionale contenuto in $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[$, e consideriamo il ricoprimento aperto di U dato dagli insiemi del tipo

$$\left(U \cap \left]-\infty, \xi - \frac{1}{n}\right[\right) \cup \left(U \cap \left]\xi + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

per n intero positivo. Da esso non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito, perché per ogni n intero positivo esistono elementi di U nell'intervallo $[\xi-1/n, \xi+1/n]$. Quindi U non è compatto. □

Esercizio 6. Sia X uno spazio metrico, con distanza d. Siano $A, B \subseteq X$ chiusi, e definiamo

$$d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

(1) Supponiamo A o B compatto. Dimostrare che allora $d(A,B) = 0$ se e solo se $A \cap B \neq \varnothing$.
(2) Trovare un esempio in cui $d(A,B) = 0$ ma $A \cap B = \varnothing$ (quindi A e B vanno scelti non compatti).

Soluzione. (1) Supponiamo B compatto, e supponiamo che $d(A,B) = 0$. Abbiamo visto a lezione che, dato A sottoinsieme di X, la funzione $d(A, -)$ definita come $d(A,x) = \inf_{a\in A} d(a,x)$ è continua. Come funzione su B, l'estremo inferiore dei valori da essa assunti è 0, perché $d(A,B) = 0$. Visto che B è compatto, la funzione $d(A, -)$ ha un minimo su B, per cui questo minimo è proprio 0, cioè esiste $b \in B$ tale che $d(A,b) = 0$. Da questo segue facilmente che $b \in \overline{A}$, ma A è chiuso per cui $b \in A$. Quindi $b \in A \cap B$, perciò $A \cap B \neq \varnothing$.

Viceversa, sia $A \cap B \neq \varnothing$. Osserviamo che sicuramente $d(A,B) \geq 0$. In questo caso abbiamo $d(A,B) = 0$ perché basta prendere $a = b =$ un elemento di $A \cap B$ e allora $d(a,b) = 0$.

(2) Sia $X = \mathbb{R}$ con distanza euclidea, prendiamo $A = \mathbb{Z}$ e

$$B = \left\{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 \right\}.$$

In questo caso $A \cap B = \varnothing$, ma l'insieme delle distanze $d(a,b)$ con $a \in A$ e $b \in B$ contiene $1/n$ per ogni intero $n \geq 2$, per cui $d(A,B) = 0$.

□

Esercizio 7. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e biiettiva, tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$. Dimostrare che $f(D^n) = D^n$, dove $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

Svolgimento. Si dimostra facilmente che $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ ha due componenti connesse per archi:

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}, \qquad C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}.$$

Visto che f è continua e biiettiva e manda la sfera S^{n-1} in se stessa, allora per ogni $i \in \{1,2\}$ abbiamo $f(C_i) \subseteq C_j$ per qualche $j \in \{1,2\}$. Non solo: visto che f è suriettiva, le due immagini $f(C_1)$ ed $f(C_2)$ non possono essere contenute entrambe in una sola C_i.

Ora: se $f(C_1) \subseteq C_1$, allora $f(C_2) \subseteq C_2$, e per forza $f(C_1)$ deve essere tutta C_1. Segue $f(D^n) = D^n$. Supponiamo allora di avere $f(C_1) \subseteq C_2$. Come prima, deduciamo anche che $f(C_1) = C_2$, ma da questo seguirebbe che $f(D^n)$ è il complementare di C_1, cioè $f(D^n)$ è un chiuso *non limitato* di $\mathbb{R}^n$. Visto che D^n è compatto, questo è assurdo. □

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo X uguale all'unione di due cerchi che si toccano in un punto, ad esempio

$$X = \{p \mid \|p - (1,0)\| = 1\} \cup \{q \mid \|q + (1,0)\| = 1\}.$$

(1) Dimostrare che X non è omeomorfo a S^1.

[1]Attenzione: **non** si richiede che ogni punto abbia un *sistema fondamentale di intorni* compatti.

(2) Dimostrare che X non è omeomorfo a $[0,1]$.

Svolgimento. Tutti gli spazi considerati sono connessi e compatti.

(1) Basta osservare che $X \setminus \{(0,0\}$ è sconnesso, mentre $S^1 \setminus \{p\}$ è connesso per ogni $p \in S^1$.
(2) In questo caso possiamo osservare che $X \setminus \{q\}$ è connesso per infiniti $q \in X$, mentre $[0,1] \setminus \{r\}$ è connesso solo per due valori di $r \in [0,1]$, cioè solo per $r = 0$ e $r = 1$.

□

Esercizio 9. Ricordiamo la definizione del gruppo ortogonale:

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \text{ matrice } n \times n \mid A \cdot A^t = I\}.$$

Dimostrare che $O(n,\mathbb{R})$ è compatto.

Svolgimento. Identifichiamo l'insieme delle matrici $n \times n$ a entrate in $\mathbb{R}$ con lo spazio $\mathbb{R}^{n^2}$. Osserviamo prima di tutto che $O(n,\mathbb{R})$ è un chiuso, perché è la controimmagine del singolo punto $I \in \mathbb{R}^{n^2}$ tramite l'applicazione continua $A \mapsto A \cdot A^t$. Inoltre $O(n,\mathbb{R})$ è limitato, perché la condizione $A \cdot A^t = I$ implica fra l'altro che le colonne di A sono tutti vettori di $\mathbb{R}^n$ di norma 1, quindi la norma di A come vettore di $\mathbb{R}^{n^2}$ è al più n. Essendo un chiuso e limitato di $\mathbb{R}^{n^2}$, l'insieme $O(n,\mathbb{R})$ è compatto. □

Esercizio 10. Sia X uno spazio topologico, con topologia $\mathcal{T}$. Aggiungiamo a X un punto (non già contenuto in X), denotato il nuovo punto col simbolo "∞", ottenendo l'insieme $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Definiamo una famiglia di sottoinsiemi $\widehat{\mathcal{T}}$ di $\widehat{X}$ nel modo seguente:

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\widehat{X} \setminus K \mid K \subseteq X,\ K \text{ chiuso e compatto}\}.$$

(1) Dimostrare che $\widehat{\mathcal{T}}$ è una topologia su $\widehat{X}$.
(2) Dimostrare che l'inclusione $\iota\colon X \to \widehat{X}$ è un'immersione aperta.
(3) Dimostrare che $\widehat{X}$ è compatto.
(4) Dimostrare che $\widehat{\mathbb{R}^n}$ è omeomorfo a S^n.

Svolgimento. Prima di svolgere l'esercizio, osserviamo due cose.

- Per ogni $A \in \widehat{\mathcal{T}}$, l'insieme $X \setminus A$ è un chiuso di X.
- Un sottoinsieme $A \subseteq \widehat{X}$ è un elemento di $\widehat{\mathcal{T}}$ se e solo se le condizioni seguenti sono verificate: nel caso $\infty \notin A$ allora A deve essere un aperto di X, invece nel caso $\infty \in A$ allora $X \setminus A$ deve essere chiuso e compatto in X.

(1) Dimostriamo che valgono gli assiomi.
 (A1) L'insieme vuoto è non contiene ∞, ed è un aperto di X, quindi è in $\mathcal{T}$. Consideriamo invece $\widehat{X}$: contiene ∞, quindi per controllare se è in $\widehat{\mathcal{T}}$ basta verificare se $X \setminus \widehat{X}$ è chiuso e compatto in X, ma questo è vero perché $X \setminus \widehat{X} = \varnothing$.
 (A2) Siano A_i elementi di $\widehat{\mathcal{T}}$ per indici qualsiasi $i \in I$, e consideriamo

$$A = \bigcup A_i.$$

Verifichiamo che A è un elmento di $\widehat{\mathcal{T}}$. Consideriamo separatamente i due casi, in cui $\infty \notin A$ e in cui $\infty \in A$. Se $\infty \notin A$ allora ∞ non è in alcun A_i, per cui ogni A_i è un aperto di X. La loro unione A è ancora un aperto di X, quindi $A \in \widehat{\mathcal{T}}$. Se invece $\infty \in A$, allora per almeno un indice $i_0 \in I$ abbiamo $\infty \in A_{i_0}$. Quindi $A_{i_0} = \widehat{X} \setminus K$ dove K è un compatto chiuso di X, e da questo segue anche $X \setminus A_{i_0} = K$. Per dimostrare che $A \in \widehat{\mathcal{T}}$, verifichiamo che $X \setminus A$ è chiuso e compatto. Abbiamo

$$X \setminus A = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = \underbrace{(X \setminus A_{i_0})}_{=K} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{i \in I, i \neq i_0} (X \setminus A_i) \right)}_{\text{chiuso in } X}$$

Questo dimostra che $X \setminus A$ è chiuso in K: visto che K è chiuso allora $X \setminus A$ è chiuso, e visto che K è compatto allora $X \setminus A$ è compatto.

(A3) Siano $A_1, A_2 \in \widehat{\mathcal{T}}$, e consideriamo $A_1 \cap A_2$. Supponiamo $\infty \in A_1 \cap A_2$, quindi entrambi gli aperti contengono ∞, cioè $X \smallsetminus A_i$ è chiuso e compatto in X per ogni i. D'altronde

$$X \smallsetminus (A_1 \cap A_2) = (X \smallsetminus A_1) \cup (X \smallsetminus A_2)$$

quindi $X \smallsetminus (A_1 \cap A_2)$ è chiuso e compatto (l'unione di due chiusi è chiusa, l'unione di due compatti è compatta). Segue $A_1 \cap A_2 \in \widehat{\mathcal{T}}$. Supponiamo ora che $\infty \notin A_1 \cap A_2$, quindi uno fra A_1 e A_2 non contiene ∞. A meno di scambiare gli indici, possiamo assumere $\infty \notin A_1$, quindi A_1 è contenuto in X, ed è un aperto di X. Allora possiamo scrivere

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (X \cap A_2)$$

e osserviamo che $X \cap A_2$ è in ogni caso un aperto di X. Quindi $A_1 \cap A_2$ è un aperto di X, da cui segue $A_1 \cap A_2 \in \widehat{\mathcal{T}}$.

(2) Affinché ι sia un'immersione aperta, deve essere iniettiva e gli aperti di X devono essere tutti del tipo $\iota^{-1}(A)$ dove $A \in \widehat{\mathcal{T}}$. Ora, ι è ovviamente iniettiva, e sia $B \subseteq X$ un aperto. Allora B è anche un aperto di $\widehat{X}$ per definizione, e abbiamo inoltre $B = \iota^{-1}(B)$, quindi B verifica la condizione richiesta prendendo semplicemente $A = B$.

(3) Sia $\mathcal{R}$ un ricomprimento aperto di $\widehat{X}$. Esiste almeno un elemento $A \in \mathcal{R}$ contenente ∞, quindi A è del tipo $A = \widehat{X} \smallsetminus K$ dove $K \subseteq X$ è chiuso e compatto. D'altronde $\mathcal{R}$ ricopre K (cioè K è *contenuto* nell'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{R}$), quindi esiste una sottofamiglia finita

$$\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{R}$$

tale che

$$K \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Ma allora

$$\{A, A_1, \dots, A_n\}$$

ricopre tutto $\widehat{X}$, cioè $\mathcal{R}$ ammette un sottoricoprimento finito.

(4) Grazie alla proiezione stereografica, vista a lezione, sappiamo che $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $X = S^n \smallsetminus \{N\}$, dove N è un singolo punto e S^n è la sfera n-dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi basta dimostrare che $\widehat{X}$ è omeomorfo a S^n. Definiamo l'applicazione $f\colon \widehat{X} \to S^n$ in modo che sia l'identità su X, e ponendo $f(\infty) = N$. L'applicazione f è biiettiva, dimostriamo che è continua e aperta, allora sarà un omeomorfismo. Sia $A \subseteq S^n$ un aperto. Se A non contiene N, allora la sua contoimmagine $f^{-1}(A)$ coincide con A stesso (considerato come sottoinsieme di X), quindi $f^{-1}(A)$ è aperto in $\widehat{X}$. Se invece A contiene N, allora $f^{-1}(A)$ contiene il punto $\infty \in \widehat{X}$. D'altronde $\widehat{X} \smallsetminus f^{-1}(A)$ coincide con $S^n \smallsetminus A$, e quest'ultimo è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^{n+1}$, quindi è compatto e anche chiuso in X, quindi $f^{-1}(A)$ è aperto in $\widehat{X}$ anche in questo caso. L considerazioni, fatte partendo da un aperto $A \subseteq \widehat{X}$ e considerando $f(A)$, dimostrano che f è anche aperta, per cui f è un omeomorfismo.

□