**Esercizio 1.** Sia $A = [-1, 1[$. Trovare tre sottospazi $X_1, X_2, X_3 \subseteq \mathbb{R}$ contenenti $A$, tali che

(1) $A$ è aperto e chiuso in $X_1$,
(2) $A$ è aperto ma non chiuso in $X_2$,
(3) $A$ è chiuso ma non aperto in $X_3$.

**Esercizio 2.** Sia $X$ spazio topologico, $S \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi, e consideriamo la funzione caratteristica di $S$, cioè

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{array}$$

Dimostrare che $f$ è continua in un punto $x \in X$ se e solo se $x \notin \partial S$.

**Esercizio 3.** Sia $X$ uno spazio topologico compatto, e sia $K \subseteq X$ un chiuso che come sottospazio è discreto. Dimostrare che $K$ è un insieme finito.

**Esercizio 4.** Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici. Supponiamo $X$ separabile e $f$ suriettiva. Dimostrare che allora $Y$ è separabile.

**Esercizio 5.** Uno spazio topologico $X$ si dice *localmente compatto* se ogni punto ha un intorno compatto[1]. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è localmente compatto.

**Esercizio 6.** Sia $X$ uno spazio metrico, con distanza $d$. Siano $A, B \subseteq X$ chiusi, e definiamo

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

(1) Supponiamo $A$ o $B$ compatto. Dimostrare che allora $d(A, B) = 0$ se e solo se $A \cap B \neq \varnothing$.
(2) Trovare un esempio in cui $d(A, B) = 0$ ma $A \cap B = \varnothing$ (quindi $A$ e $B$ vanno scelti non compatti).

**Esercizio 7.** Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e biiettiva, tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$. Dimostrare che $f(D^n) = D^n$, dove $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

**Esercizio 8.** In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $X$ uguale all'unione di due cerchi che si toccano in un punto, ad esempio

$$X = \{p \mid \|p - (1, 0)\| = 1\} \cup \{q \mid \|q + (1, 0)\| = 1\}.$$

(1) Dimostrare che $X$ non è omeomorfo a $S^1$.
(2) Dimostrare che $X$ non è omeomorfo a $[0, 1]$.

**Esercizio 9.** Ricordiamo la definizione del gruppo ortogonale:

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \text{ matrice } n \times n \mid A \cdot A^t = I\}.$$

Dimostrare che $O(n, \mathbb{R})$ è compatto.

**Esercizio 10.** Sia $X$ uno spazio topologico, con topologia $\mathcal{T}$. Aggiungiamo a $X$ un punto (non già contenuto in $X$), denotato il nuovo punto col simbolo "$\infty$", ottenendo l'insieme $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Definiamo una famiglia di sottoinsiemi $\widehat{\mathcal{T}}$ di $\widehat{X}$ nel modo seguente:

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\widehat{X} \setminus K \mid K \subseteq X,\ K \text{ chiuso e compatto}\}.$$

(1) Dimostrare che $\widehat{\mathcal{T}}$ è una topologia su $\widehat{X}$.
(2) Dimostrare che l'inclusione $\iota\colon X \to \widehat{X}$ è un'immersione aperta.
(3) Dimostrare che $\widehat{X}$ è compatto.
(4) Dimostrare che $\widehat{\mathbb{R}^n}$ è omeomorfo a $S^n$.

[1] Attenzione: **non** si richiede che ogni punto abbia un *sistema fondamentale di intorni* compatti.