Esercizio 1. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $]-q,q[$, al variare di $q \in \mathbb{Q}$ con $q > 0$.

(1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ e descrivere tutti gli aperti;
(2) Derminare le parti interne degli intervalli $]-\infty,-1]$ e $[-5,2]$ nella topologia $\mathcal{T}$;
(3) Derminare le chiusure di $]-\infty,-1]$, di $\{0\}$ e di $\{1\}$ nella topologia $\mathcal{T}$;
(4) Dimostrare che $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ è connesso ma non è compatto, né di Hausdorff.

Svolgimento. (1) Usiamo un lemma visto a lezione. Come prima condizione da verificare, l'insieme $\mathbb{R}$ deve essere unione di elementi di $\mathcal{B}$; questo è vero perché

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q},q>0}]-q,q[.$$

La seconda condizione da verificare è: l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ dev'essere unione di elementi di $\mathcal{B}$. Per $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ abbiamo

$$]-q_1,q_1[\,\cap\,]-q_2,q_2[\,=\,]-\min\{q_1,q_2\},\min\{q_1,q_2\}[,$$

cioè l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ è un elemento di $\mathcal{B}$. La seconda condizione è verificata, quindi $\mathcal{B}$ è una base di una topologia $\mathcal{T}$.

Un aperto qualsiasi di $\mathcal{T}$ si scrive come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Una tale unione si può scrivere come

$$A = \bigcup_{q\in I}]-q,q[,$$

dove I è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ fatto da numeri positivi. Dovendo descrivere tutte le possibili unioni di questo tipo, possiamo supporre A non vuoto, quindi I contiene qualche razionale positivo.

Sia $s = \sup I$ (quindi $s > 0$), e dimostriamo che

$$A =]-s,s[.$$

Infatti, per ogni $q \in I$ si ha $q \leq s$ e quindi $]-q,q[\,\subseteq\,]-s,s[$. Segue $A \subseteq\,]-s,s[$. Inoltre, se per assurdo valesse $A \not\supseteq\,]-s,s[$, esisterebbe $r \in\,]-s,s[$ con $r \notin A$. Possiamo supporre $r \geq 0$, perché sia A sia $]-s,s[$ contengono gli opposti di tutti i loro rispettivi elementi.

Quindi $0 \leq r < s$, ed esisterebbe $q_0 \in I$ tale che $r < q_0 < s$, perché s è il sup di I. Seguirebbe $A \supseteq\,]-q_0,q_0[\,\ni r$: assurdo. Allora vale $A =]-s,s[$.

Segue: gli elementi di $\mathcal{T}$ sono intervalli del tipo $]-s,s[$, per s estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ di numeri positivi, in particolare $s \in \mathbb{R}$ e $s > 0$. Infine, per ogni $r \in \mathbb{R}$ maggiore di 0 esiste un sottoinsieme I_r di $\mathbb{Q}$ fatto da numeri positivi e tale che $r = \sup I_r$, quindi

$$\mathcal{T} = \{\,]-r,r[\mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Abbiamo

$$]-\infty,-1]^\circ = \bigcup_{r\in\mathbb{R} \text{ tale che }]-r,r[\,\subseteq\,]-\infty,-1]}]-r,r[.$$

Dato che nessun intervallo non vuoto del tipo $]-r,r[$ è contenuto in $]-\infty,-1]$, abbiamo

$$]-\infty,-1]^\circ = \varnothing$$

Usiamo lo stesso ragionamento per calcolare la parte interna di $[-5,2]$: un intervallo del tipo $]-r,r[$ è contenuto in $[-5,2]$ se e solo se $r \leq 2$. Segue

$$[-5,2]^\circ = \bigcup_{r<2}]-r,r[$$

Tutti gli intervalli che compaiono nell'unione sono contenuti in $]-2,2[$, che è uno di loro. Per cui

$$[-5,2]^\circ =]-2,2[.$$

(3) La chiusura di un insieme A è il complementare della parte interna del complementare di A. Ragionando come sopra, abbiamo

$$]-1,+\infty[^\circ =]-1,1[$$

per cui

$$\overline{]-\infty,-1]} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,$$

e

$$(]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[)^\circ = \varnothing$$

(perché nessun intervallo del tipo voluto è nel sottoinsieme), per cui

$$\overline{\{0\}} = \mathbb{R}.$$

Infine, abbiamo

$$(]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[)^\circ =]-1, 1[$$

(perché $]-r, r[$ è nell'unione dei due intervalli fra parentesi se e solo se $r \leq 1$), per cui

$$\overline{\{1\}} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

(4) Osserviamo che $\mathcal{T}$ è una topologia meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Se per assurdo $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ fosse sconnesso, avremmo un sottoinsieme proprio non vuoto contemporaneamente chiuso e aperto nella topologia $\mathcal{T}$. Lo sarebbe anche per la topologia euclidea: assurdo, perchè $\mathbb{R}$ con topologia euclidea è connesso.

Per dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è compatto basta osservare che dal ricoprimento aperto

$$\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}, r > 0}]-r, r[$$

non si può estrarre un sottoricoprimento finito, infatti ogni unione finita di sottoinsiemi del ricoprimento è limitata.

Infine, due aperti non vuoti di $\mathcal{T}$ si intersecano in 0. Dato che $\mathbb{R}$ contiene due punti distinti, è impossibile trovare loro intorni (rispettivi) disgiunti, quindi $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è di Hausdorff. $\square$

Esercizio 2. Dimostrare che intersezione finita di aperti densi è ancora un aperto denso.

Svolgimento. Dimostriamo l'enunciato per l'intersezione di due aperti densi $A \cap B$ di uno spazio topologico X. Il caso di un'intersezione finita qualsiasi segue facilmente per induzione.

Dimostriamo che $A \cap B$ è denso dimostrando che interseca ogni aperto non vuoto. Ricordiamo che questo conclude la dimostrazione, perché se allora per assurdo non fosse denso (cioè $\varnothing \neq X \smallsetminus \overline{A \cap B}$), avremmo $A \cap B \cap (X \smallsetminus \overline{(A \cap B)}) = \varnothing$ (perché comunque $A \cap B \subseteq \overline{A \cap B}$): assurdo.

Sia dunque C aperto non vuoto. Sappiamo che $A \cap C$ è non vuoto, perché A è denso. È anche aperto, per cui interseca B, dato che quest'ultimo è denso. Segue: $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. $\square$

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ l'applicazione continua definita nel modo seguente:

(1) $f(x) = x$ se $\|x\| \leq 1$,
(2) $f(x) = x/\|x\|$ se $\|x\| \geq 1$.

Dire, motivando la risposta, se f è aperta, se è chiusa e se è un'identificazione.

Svolgimento. L'applicazione f non è aperta. Infatti, dato l'aperto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\},$$

la sua immagine è la circonferenza

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}.$$

Quest'ultima non è un sottoinsieme aperto di D^2: se per assurdo lo fosse, esisterebbe un aperto B di $\mathbb{R}^2$ tale che $B \cap D^2 = S^1$. Per $x \in S^1$, prendiamo ad esempio $x = (1, 0)$, esisterebbe allora $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \cap D^2 \subseteq S^1$. Ma $B(x, \varepsilon) \cap D^2 \ni (1 - \frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin S^1$: assurdo.

L'applicazione f non è chiusa. Infatti l'immagine del chiuso

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$$

è l'insieme

$$f(C) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \in S^1, x_1 x_2 > 0\}.$$

Non si tratta di un chiuso di D^2, perché $(0, 1) \notin f(C)$, eppure ogni intorno di $(0, 1)$ contiene punti di $f(C)$ (esempio: $(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}), \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))$ per $n \in \mathbb{Z}$ sufficientemente grande).

Infine, dimostriamo che f è un'identificazione. Intanto, è continua. Questo si verifica facilmente in ogni punto $x \in \mathbb{R}^2$: se $\|x\| < 1$ si usa la continuità di $x \mapsto x$, se $\|x\| > 1$ si usa la continuità di $x \mapsto x/\|x\|$. Per $\|x\| = 1$ si verifica "con ε e δ": dato $\varepsilon > 0$, si sceglie come $\delta > 0$ il minimo fra i δ assicurati dalla continuità delle due applicazioni sopra citate.

Dal fatto che f è continua segue che se $A \subseteq D^2$ è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è aperto. Dobbiamo dimostrare l'inverso, e cioè: se $f^{-1}(A)$ è aperto per un $A \subseteq D^2$, allora A è aperto. Osserviamo che

$$f^{-1}(A) = A \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1, x/\|x\| \in A\}}_{\subseteq \mathbb{R}^2 \setminus D^2},$$

da cui segue che

$$A = f^{-1}(A) \cap D^2.$$

Quindi, se $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^2$, allora A è aperto nella topologia di sottospazio di D^2. □

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x+1, y+2) = f(x-1, y+1) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che f possiede massimo e minimo.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x+1, y-1) = f((x+1)-1, (y-1)+1) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Segue:

$$f(x, y+3) = f((x+1)-1, (y+2)+1) = f(x, y)$$

e

$$f(x+3, y) = f((x+1)+1)+1), ((y+2)-1)-1) = f(x, y).$$

Siano n ed m i più grandi interi tali che $3n \leq x$ e $3m \leq y$: possiamo scrivere $x = 3n + x_0$ e $y = 3m + y_0$, dove $x_0, y_0 \in [0, 3[$. Allora si dimostra facilmente

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

usando le formule qui sopra, ad esempio per induzione su $|n| + |m|$. Quindi $f(\mathbb{R}^2) = f(R)$, dove $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Ora, R è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, quindi è compatto, ed f è continua, per cui $f(R)$ ha minimo e massimo. Quindi anche f li ha. □

Esercizio 5. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono simmetrici rispetto allo 0, ossia $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A = -A = \{-x \mid x \in A\}$. Dimostrare che:

(1) $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è né connesso, né compatto, né di Hausdorff;
(3) l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$, non è continua (prendendo su dominio e codominio la topologia $\mathcal{T}$);
(4) l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, è continua (prendendo su dominio e codominio la topologia $\mathcal{T}$);
(5) (non banale) esiste uno spazio di Hausdorff X ed una identificazione $p\colon \mathbb{R} \to X$ che gode della seguente proprietà universale: data comunque un'applicazione continua $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to Y$, con Y spazio di Hausdorff, esiste un'applicazione continua $g\colon X \to Y$ tale che $f = g \circ p$.

Svolgimento. (1) Sono da dimostrare i tre assiomi (A1), (A2), (A3). L'assioma (A1) è vero perché $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ sono simmetrici rispetto a 0. L'assioma (A2) vale perché l'unione di insiemi simmetrici rispetto a 0 è simmetrica rispetto a 0, e lo stesso vale per l'intersezione, per cui anche (A3) è vero.

(2) Dimostriamo che $\mathbb{R}$ non è connesso esibendo un sottoinsieme proprio non vuoto e contemporaneamente aperto e chiuso. Basta prendere ad esempio $A = [-1, 1]$, che è aperto perchè è simmetrico rispetto a 0. Anche il suo complementare $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ è simmetrico rispetto a 0, quindi anch'esso è aperto, per cui $[-1, 1]$ è anche chiuso.

Dimostriamo che $\mathbb{R}$ non è compatto, esibendo un ricoprimento aperto (cioè fatto da insiemi simmetrici) da cui non si può estrarre un sottoricoprimento finito, ad esempio

$$\mathbb{R} = \bigcup_{r>0} [-r, r].$$

Dimostriamo che $\mathbb{R}$ non è di Hausdorff. Osserviamo che è possibile trovare intorni disgiunti per molte coppie di punti distinti, ad esempio 1 e 2 hanno gli intorni disgiunti rispettivamente $\{1, -1\}$ e $\{2, -2\}$. Ma i punti 1 e -1 non possono avere intorni disgiunti, perchè un intorno U di 1 necessariamente contiene un aperto contenente 1, cioè un insieme simmetrico contenente 1, e quindi U deve contenere per forza anche -1.

(3) L'insieme $\{0\}$ è aperto, ma la sua controimmagine $f^{-1}(0) = \{3\}$ non è simmetrico quindi non è aperto.

(4) Sia A un aperto, cioè un insieme simmetrico. La sua controimmagine è formata da tutti gli elementi di A moltiplicati per 3, e quindi anch'esso è un insieme simmetrico.

(5) Poniamo $X = \mathbb{R}/\sim$ dove $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x = -y$, e sia $p\colon \mathbb{R} \to X$ il quoziente topologico. Osserviamo che tutte le classi di equivalenza sono sottoinsiemi simmetrici di $\mathbb{R}$, perché sono quasi tutti del tipo $\{-x, x\}$ con $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, tranne che la classe di equivalenza di 0 che è formata dal solo 0.

Osserviamo che X ha topologia discreta, perché dato qualsiasi $A \subseteq X$ allora la sua controimmagine è un insieme simmetrico quindi aperto in X (perché unione di classi di equivalenza), perciò A è aperto in topologia quoziente. Quindi X è di Hausdorff. Sia ora $f\colon \mathbb{R} \to Y$ con Y di Hausdorff, dimostriamo che f è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$. Sia $r \in \mathbb{R}$, e supponiamo per assurdo che $f(r) \neq f(-r)$. Allora esistono in Y due intorni disgiunti U e V, rispettivamente di $f(r)$ e di $f(-r)$. Rimpiazzando U e V con aperti contenuti in essi e contenenti i punti in questione, possiamo assumere che U e V siano aperti. Segue che $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono due aperti disgiunti che contengono uno r e l'altro $-r$: assurdo perché dovrebbero essere simmetrici.

Deduciamo che f passa al quoziente, cioè esiste g come richiesto.

□

Esercizio 6. Sia m il valore minimo di una funzione continua $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ e si assuma $m > 1$. Descrivere esplicitamente un omeomorfismo h tra il quadrato $[0,2] \times [0,2]$ e l'insieme

$$X = \{(x,y) \in [0,2] \times \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

tale che $h(1,1) = (1,1)$.

Svolgimento.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } y \leq 1 \\ (x, (y-1)(f(x)-1)+1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con inversa

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } y \leq 1 \\ (x, \frac{(y-1)}{(f(x)-1)} + 1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Esercizio 7. Si consideri una successione di 3 applicazioni continue:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

Dimostrare che se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono omeomorfismi, allora f, g, h sono omeomorfismi.

Svolgimento. Se una composizione $g \circ f$ (di applicazioni qualsiasi) è iniettiva, allora la prima applicazione f è iniettiva. Se $g \circ f$ è suriettiva, allora la seconda applicazione g è suriettiva (verificare).

Nella nostra situazione $g \circ f$ è biiettiva, per cui f è iniettiva e g è suriettiva. D'altronde $h \circ g$ è biiettiva, per cui g è iniettiva e h è suriettiva. Ma allora g è biiettiva, cioè esiste l'inversa g^{-1}. Visto che $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ allora h è composizione di due biiezioni, per cui anche h è biiettiva. Usando $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ concludiamo che anche f è biiettiva.

Verifichiamo ora che g è un omeomorfismo. Sappiamo che è biiettiva e continua, quindi dobbiamo solo dimostrare che g^{-1} è continua. Sia $U \subseteq B$ un aperto, allora $(h \circ g)(U) = h(g(U))$ è aperto, perché $h \circ g$ è un omeomorfismo. Allora $g(U) = h^{-1}(h(g(U)))$ è aperto in C perché h è continua. D'altronde $g(U) = (g^{-1})^{-1}(U)$, quindi g^{-1} è continua, cioè g è un omeomorfismo. In particolare, anche g^{-1} è un omeomorfismo.

Infine $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ e $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ esprimono ora h ed f come composizioni di omeomorfismi, quindi sono anch'esse omeomorfismi. □

Esercizio 8. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottospazio compatto e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottospazio ottenuto da X aggiungendo tutti i segmenti che uniscono tutte le coppie di punti $p, q \in X$ tali che $\|p\| = \|q\|$. Dimostrare che Y è compatto.

Svolgimento. In $X \times X$ considero

$$Z = \{(p,q) \mid \|p\| = \|q\|\}.$$

Possiamo esprimere Y come l'immagine della seguente applicazione continua

$$\begin{array}{ccc} Z \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((p,q),t) & \mapsto & (1-t)p + tq \end{array}$$

infatti al variare di t in $[0,1]$ l'immagine $(1-t)p + tq$ percorre il segmento che va da p a q.

Osserviamo che Z è chiuso in $X \times X$, essendo espresso come il luogo dove due funzioni continue (con codominio $\mathbb{R}$ di Hausdorff) coincidono. Inoltre $X \times X$ è compatto, e segue che Z è compatto. Quindi anche $Z \times [0,1]$ è compatto, e allora Y è immagine di un compatto tramite un'applicazione continua, per cui è compatto. $\square$

Esercizio 9. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ per la relazione di equivalenza $x \sim y$ se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 2^n y$. Dimostare che X è connesso e compatto e che esiste un'applicazione continua e suriettiva $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Dimostrare inoltre che X è omeomorfo a $S^2 \times S^1$.

Svolgimento. Lo spazio X è connesso perché è immagine di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, che è connesso per archi, quindi connesso.

Inoltre X è anche immagine di

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$$

che è compatto, per cui X è compatto.

Ricordiamo che $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è definito come il quoziente per la relazione d'equivalenza, che denotiamo qui con $x \sim_{\mathbb{P}} y$, che identifica $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se $x = \lambda y$ per un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $\pi \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il quoziente per la relazione di equivalenza $\sim_{\mathbb{P}}$.

Ora, il quoziente π è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$, perché se x e y sono nella stessa classe di equivalenza per $\sim$, cioè $x \sim y$, allora x e y differiscono per un riscalaggio tramite un fattore del tipo 2^n. Ma allora vale anche $x \sim_{\mathbb{P}} y$, prendendo semplicemente $\lambda = 2^n$. Denotiamo con $p \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to X$ il quoziente per $\sim$, e abbiamo un diagramma del tipo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \\ p \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

dove π è costante sulle fibre di p. Allora π passa al quoziente, ottenendo $f \colon X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ continua. Osserviamo che f semplicemente manda la classe $[x]_\sim$ rispetto a $\sim$ di un $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ nella classe $[x]_{\sim_{\mathbb{P}}}$ di x rispetto a $\sim_{\mathbb{P}}$. Da questo segue anche che f è suriettiva.

Infine, ricordiamo che S^1 è omeomorfo al quoziente di $\mathbb{R}$ per la relazione di equivalenza $\sim_{\mathbb{Z}}$ che identifica $t, s \in \mathbb{R}$ se e solo se $t = s + n$ per un $n \in \mathbb{Z}$. Possiamo allora considerare l'applicazione $\rho \colon S^2 \times \mathbb{R} \to S^2 \times S^1$ che è l'identità sul primo fattore, e il quoziente per $\sim_{\mathbb{Z}}$ sul secondo:

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & S^2 \times \mathbb{R} & \to & S^2 \times S^1 \\ & (a,t) & \mapsto & (a, [t]_{\sim_{\mathbb{Z}}}). \end{array}$$

Non è difficile dimostrare che ρ è il quoziente per un gruppo di omeomorfismi, e precisamente quello che agisce come l'identità su S^2 e con le traslazioni per numeri interi su $\mathbb{R}$. Questo dimostra che ρ è un'identificazione aperta.

Diamo anche una dimostrazione diretta di questo fatto, senza usare i gruppi di omeomorfismi (ma che comunque essenzialmente ripete lo stesso ragionamento): dimostriamo che ρ è aperta, per cui sarà un'identificazione. Prendiamo un aperto della base solita per la topologia prodotto, cioè un aperto del tipo $U \times V$ dove $U \subseteq S^2$ e $V \subseteq \mathbb{R}$ sono aperti. L'immagine $\rho(U \times V)$ è uguale a $U \times \psi(V)$, dove ψ è il quoziente $\mathbb{R} \to S^1$ per la relazione d'equivalenza $\sim_{\mathbb{Z}}$. Verifichiamo che $\psi(V)$ è aperto in S^1; visto che si tratta della topologia quoziente basta verificare che $\psi^{-1}(\psi(V))$ è aperto in $\mathbb{R}$. Abbiamo

$$\psi^{-1}(\psi(V)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V + n$$

dove $V + n = \{v + n \mid v \in V\}$. Tutti gli insiemi del tipo $V + n$ sono aperti in $\mathbb{R}$, quindi $\psi^{-1}(\psi(V))$ è aperto in $\mathbb{R}$, e deduciamo che $\psi(V)$ è aperto in S^1. Quindi ρ manda aperti della base in aperti di $S^2 \times S^1$, cioè è un'applicazione aperta. Essendo anche continua e suriettiva, ρ è un'identificazione.

Ora, il prodotto $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ è omeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}$, tramite l'omeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to S^2 \times \mathbb{R}$ dato da

$$x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|}, \log_2 \|x\| \right)$$

con inversa

$$(a, r) \mapsto a2^r.$$

A questo punto si consideri

$$\rho \circ \varphi\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to S^2 \times S^1.$$

Per come abbiamo definito le applicazioni, risulta che $\rho \circ \varphi$ è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$. Infatti, considerando un elemento qualsiasi $x \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ e la sua classe d'equivalenza $[x]_\sim$, abbiamo

$$(\rho \circ \varphi)(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, [\log_2 \|x\|]_{\sim_\mathbb{Z}} \right)$$

e se $x \sim y$ allora $x = 2^n y$ per un $n \in \mathbb{Z}$, quindi $x/\|x\| = y/\|y\|$ e abbiamo

$$(\rho \circ \varphi)(y) = \left(\frac{x}{\|x\|}, [\log_2 \|2^n x\|]_{\sim_\mathbb{Z}} \right) = \left(\frac{x}{\|x\|}, [\log_2 \|x\| + n]_{\sim_\mathbb{Z}} \right) = (\rho \circ \varphi)(x).$$

Quindi $\rho \circ \varphi$ passa al quoziente per $\sim$, producendo un'applicazione continua $\Phi\colon X \to S^2 \times S^1$ data appunto da

$$\Phi([x]_\sim) = \left(\frac{x}{\|x\|}, [\log_2 \|x\|]_{\sim_\mathbb{Z}} \right).$$

Dimostriamo che Φ è un omeomorfismo, esibendo l'inversa e dimostrando che essa è continua. Prima di tutto, Φ è chiaramente suriettiva, ed è anche iniettiva perché se $x, y \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ soddisfano $\Phi(x) = \Phi(y)$ allora $x/\|x\| = y/\|y\|$, per cui $x = uy$ dove $u = \|x\|/\|y\|$ è un numero reale positivo. Inoltre abbiamo anche

$$[\log_2 \|x\|]_{\sim_\mathbb{Z}} = [\log_2 \|ux\|]_{\sim_\mathbb{Z}} = [log_2 u + \log_2 \|x\|]_{\sim_\mathbb{Z}}$$

il che implica $\log_2 u \in \mathbb{Z}$, cioè $u = 2^n$ per un $n \in \mathbb{Z}$, e quindi $[x]_\sim = [y]_\sim$, cioè Φ è iniettiva.

Abbiamo dimostrato che Φ è biiettiva, e sappiamo che è continua. Rimane da dimostrare che l'inversa è continua, quindi cerchiamo di costruirla tramite le applicazioni che abbiamo già. Consideriamo le applicazioni

$$\begin{array}{ccccc} S^2 \times \mathbb{R} & \overset{\varphi^{-1}}{\to} & \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} & \overset{p}{\to} & X \\ (a, r) & \mapsto & a2^r & \mapsto & [a2^r]_\sim \end{array}$$

La composizione $p \circ (\varphi^{-1})$ è costante sulle fibre di ρ, perché se (a, r) e (a', r') sono nella stessa fibra di ρ allora $a = a'$ e i numeri reali r ed r' differiscono per un intero, e allora $a2^r \sim a'2^{r'}$.

Quindi possiamo applicare a $p \circ (\varphi^{-1})$ la proprietà universale dell'identificazione ρ, cioè esiste un'applicazione continua $\Psi\colon S^2 \times S^1 \to X$ tale che $p \circ (\varphi^{-1}) = \rho \circ \Psi$. In altre parole Ψ prende una coppia del tipo $(a, [r]_{\sim_\mathbb{Z}})$ con $a \in S^2$ e r reale positivo, e la manda nella classe $[a2^r]_\sim$.

Ma questa è proprio l'inversa di Φ, cioè $\Phi^{-1} = \Psi$. Allora Φ è un omeomorfismo. □

Esercizio 10. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

$$X = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } s \in \mathbb{R} \text{ tale che } s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0\},$$

e per ogni $r > 0$ sia $A_r = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum |a_i| \leq r\}$. Dimostrare:

(1) A_r è chiuso per ogni r;
(2) $A_1, A_2, \dots$ è un *ricoprimento fondamentale* di $\mathbb{R}^n$, cioè un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni i;
(3) $A_1 \cap X$ è chiuso;
(4) X è chiuso.

Svolgimento. (1) L'insieme A_r è chiuso perché è la controimmagine di $[0, r]$ tramite l'applicazione $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_i |a_i|$.

(2) Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto allora $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni i, per definizione di topologia di sottospazio.

Viceversa, supponiamo di avere un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni i. Dimostriamo che U è aperto verificando che è un intorno di ciascun suo punto. Preso un punto qualsiasi $x \in U$, esistono $\varepsilon > 0$ ed un indice i_0 tale che

$$A_{i_0} \supseteq B(0, \varepsilon) \ni x$$

(basta ricordare i confronti noti fra la norma euclidea e quella "ℓ_1" data da $\sum |a_i|$). Sia ora V aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $V \cap A_{i_0} = U \cap A_{i_0}$: esiste perché $U \cap A_{i_0}$ è aperto in A_{i_0}. Essendo V aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$V \supseteq B(x, \delta) \ni x.$$

Allora $V \cap A_{i_0}$, e perciò anche U, contengono $B(0, \varepsilon) \cap B(x, \delta)$, che è un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente x. Segue che U è un intorno di ciascun suo punto, quindi è aperto.

(3) Consideriamo $Y \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definito come

$$Y = \{(s, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0\}.$$

Abbiamo che Y è un chiuso di $\mathbb{R}^{n+1}$; inoltre $X = p(Y)$ dove $p \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ è la proiezione sulle ultime n entrate (cioè p scarta la prima entrata).

Cerchiamo ora di esprimere $A_1 \cap X$ usando Y. Consideriamo il seguente sottoinsieme di Y:

$$Z = \left\{ (s, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \ \sum_i |a_i| \leq 1 \right\}.$$

Abbiamo $p(Z) = A_1 \cap X$, inoltre Z è chiuso. Dimostriamo che Z è anche limitato; prendiamo $(s, a_1, \ldots, a_n) \in Z$ e osserviamo che

$$|s|^n \leq |a_1||s|^{n-1} + |a_2||s|^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}||s| + |a_n|$$

per la disuguaglianza triangolare. Posto $K = \max\{|a_i|\}$, segue

$$|s|^n \leq K(|s|^{n-1} + |s|^{n-2} + \ldots + |s| + 1)$$

Ora, se $|s| > 1$ allora $|s|^{n-1} \geq |s|^{n-2} \geq \ldots \geq 1$, e otteniamo

$$|s|^n \leq Kn|s|^{n-1}$$

cioè $|s| < Kn$. Potrebbe anche verificarsi la condizione $|s| \leq 1$, ma in ogni caso abbiamo $|s| \leq \max\{1, Kn\}$, quindi Z è limitato.

Deduciamo che Z è compatto, per cui $p(Z) = A_1 \cap X$ è compatto. Essendo compatto in un Hausdorff, è anche chiuso.

(4) Come nel punto precedente, si dimostra che $A_2 \cap X$, $A_3 \cap X, \ldots$ sono tutti chiusi, in particolare $A_i \cap X$ è chiuso in A_i. Il suo complementare in A_i è aperto in A_i, e questo complementare si può scrivere anche come $(\mathbb{R}^n \setminus X) \cap A_i$. Segue dal punto (2) che $\mathbb{R}^n \setminus X$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, quindi X è chiuso in $\mathbb{R}^n$.

□