Esercizio 1. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti gli intervalli del tipo $]-q,q[$, al variare di $q \in \mathbb{Q}$.

(1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ e descrivere tutti gli aperti;
(2) Derminare le parti interne degli intervalli $]-\infty,-1]$ e $[-5,2]$ nella topologia $\mathcal{T}$;
(3) Derminare le chiusure di $]-\infty,-1]$, di $\{0\}$ e di $\{1\}$ nella topologia $\mathcal{T}$;
(4) Dimostrare che $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ è connesso ma non è compatto, né di Hausdorff.

Esercizio 2. Dimostrare che intersezione finita di aperti densi è ancora un aperto denso.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ l'applicazione continua definita nel modo seguente:

(1) $f(x) = x$ se $\|x\| \leq 1$,
(2) $f(x) = x/\|x\|$ se $\|x\| \geq 1$.

Dire, motivando la risposta, se f è aperta, se è chiusa e se è un'identificazione.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x+1,y+2) = f(x-1,y+1) = f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che f possiede massimo e minimo.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono simmetrici rispetto allo 0, ossia $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A = -A = \{-x \mid x \in A\}$. Dimostrare che:

(1) $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
(2) $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ non è né connesso, né compatto, né di Hausdorff;
(3) l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-3$, non è continua (prendendo su dominio e codominio la topologia $\mathcal{T}$);
(4) l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, è continua (prendendo su dominio e codominio la topologia $\mathcal{T}$);
(5) (non banale) esiste uno spazio di Hausdorff X ed una identificazione $p\colon \mathbb{R} \to X$ che gode della seguente proprietà universale: data comunque un'applicazione continua $f\colon (\mathbb{R},\mathcal{T}) \to Y$, con Y spazio di Hausdorff, esiste un'applicazione continua $g\colon X \to Y$ tale che $f = g \circ p$.

Esercizio 6. Sia m il valore minimo di una funzione continua $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ e si assuma $m > 1$. Descrivere esplicitamente un omeomorfismo h tra il quadrato $[0,2] \times [0,2]$ e l'insieme

$$X = \{(x,y) \in [0,2] \times \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

tale che $h(1,1) = (1,1)$.

Esercizio 7. Si consideri una successione di 3 applicazioni continue:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

Dimostrare che se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono omeomorfismi, allora f, g, h sono omeomorfismi.

Esercizio 8. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottospazio compatto e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottospazio ottenuto da X aggiungendo tutti i segmenti che uniscono tutte le coppie di punti $p, q \in X$ tali che $\|p\| = \|q\|$. Dimostrare che Y è compatto.

Esercizio 9. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ per la relazione di equivalenza $x \sim y$ se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 2^n y$. Dimostare che X è connesso e compatto e che esiste un'applicazione continua e suriettiva $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Dimostrare inoltre che X è omeomorfo a $S^2 \times S^1$.

Esercizio 10. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

$$X = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } s \in \mathbb{R} \text{ tale che } s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0\},$$

e per ogni $r > 0$ sia $A_r = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum |a_i| \leq r\}$. Dimostrare:

(1) A_r è chiuso per ogni r;
(2) $A_1, A_2, \ldots$ è un *ricoprimento fondamentale* di $\mathbb{R}^n$, cioè un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se $U \cap A_i$ è aperto in A_i per ogni i;
(3) $A_1 \cap X$ è chiuso;
(4) X è chiuso.