Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.9

17.12.2021

Esercizio 1. Consideriamo le applicazioni lineari $f_1 = L_{A_1}, f_2 = L_{A_2}$ da $\mathbb{R}^2$ in se stesso corrispondenti rispettivamente alle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Per $i = 1$ e $i = 2$:

(1) calcolare gli autovalori di f_i,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base dell'autospazio $\mathbb{R}^2_\lambda$,
(3) dire se f_i è diagonalizzabile,
(4) se f_i è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M_i e una matrice diagonale D_i tali che

$$D_i = M_i^{-1} \cdot A_i \cdot M_i$$

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione lineare $f = L_A$ da $\mathbb{R}^3$ in se stesso dove

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare gli autovalori di f,
(2) per ogni autovalore λ, calcolare la dimensione e trovare una base di $\mathbb{R}^3_\lambda$,
(3) dire se f è diagonalizzabile,
(4) se f è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile M e una matrice diagonale D tali che

$$D = M^{-1} \cdot A \cdot M.$$

Esercizio 3. Sia ϑ un numero reale, e si consideri

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

come matrice in $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Per tutti i valori di $\vartheta \in \mathbb{R}$:

(1) si trovino gli autovalori di A in $\mathbb{C}$;
(2) si trovino basi per gli autospazi di A in $\mathbb{C}^2$;
(3) si determini se A è diagonalizzabile come matrice di $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Esercizio 4. Dimostrare che una matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile se e solo se $a \neq d$ oppure $b = 0$.

Esercizio 5. Data una matrice quadrata A e un polinomio

$$q(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

definiamo il *valore* $q(A)$ *del polinomio nella matrice* A come la matrice seguente:

$$q(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I$$

(le potenze di A sono calcolate col solito prodotto fra matrici). Sia A una matrice 2×2, e $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico. Verificare che $p_A(A)$ è la matrice nulla.

Esercizio 6. Sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare diagonalizzabile, con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ (distinti).

(1) Sia W la somma di tutti gli autospazi V_{λ_i} tali che l'autovalore corrispondente λ_i sia $\neq 0$. Dimostrare che $W = \mathrm{Im}(f)$.

(2) Dimostrare che $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V$.

Esercizio 7. Trovare, scrivendone la matrice corrispondente, un'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano una base dell'autospazio $\mathbb{R}^3_{-3}$.

Esercizio 8. Dimostrare che non esiste alcuna applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 2, e i vettori

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono autovettori di autovalore 3.

Esercizio 9. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 2\alpha \\ 2 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

abbia $\lambda = 1$ come autovalore.