Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.8

6.12.2021

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -1 & 0 & -i \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$. Si determini se sono invertibili, e in caso affermativo si calcolino le loro inverse.

Esercizio 2. Si studi l'invertibilità della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 2y + 3z = 0$, e W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
(2) Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$; calcolare le proiezioni dei vettori e_1, e_2, e_3 su W lungo U.
(3) Sia p la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su W lungo U, considerata come applicazione $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si scriva la matrice di p rispetto alla base canonica, cioè la matrice A tale che $f = L_A$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2}$ e si considerino i seguenti sottoinsiemi

$$U = \mathrm{Span}\{z^2 - iz + 1\}, \qquad W = \{p \in V \mid p(i) = 0\}.$$

Verificare che W è un sottospazio vettoriale e che $V = U \oplus W$. Inoltre, descrivere esplicitamente le proiezioni di V su W lungo U, e su U lungo W.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti prodotti fra matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

per qualsiasi valore di $a, b, c, d \in K$.

Esercizio 6. Si scriva la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono le seguenti matrici di $\mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 7. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di uno spazio vettoriale V. Siano dati inoltre i seguenti vettori

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 \\ w_2 &= v_2 - v_3 \\ w_3 &= -v_1 + v_2 \end{aligned}$$

(1) Verificare che $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ è una base di V.
(2) Scrivere la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio 8. Si consideri l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siano

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Scrivere:

(1) la matrice associata ad L_A rispetto alle basi canoniche sia per il dominio sia per il codominio;
(2) la matrice associata ad L_A rispetto alla base canonica per il dominio e alla base $\mathcal{C}$ per il codominio;
(3) la matrice associata ad L_A rispetto alla base $\mathcal{B}$ per il dominio e alla base canonica per il codominio;
(4) la matrice associata ad L_A rispetto alla base $\mathcal{B}$ per il dominio e alla base $\mathcal{C}$ per il codominio.

Esercizio 9. Consideriamo l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - c \\ a + b \end{pmatrix}.$$

(1) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche, rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.
(2) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, dove

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

Esercizio 10. Si riconsideri p la proiezione del primo esercizio. Si scelga una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo tale che i primi vettori formino una base di W, e gli ultimi formino una base di U. Si scriva la matrice di p rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 11. Calcolare, per ogni intero positivo n, le seguenti potenze di matrici:

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}^n, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 12. Sia $T\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare data da $T(p) = p' + xp''$.

(1) Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ (la stessa per dominio e codominio), e anche la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{C} = (x+1, x-1, x^2+x)$ (la stessa per dominio e codominio).
(2) Si trovino una base di $\ker(T)$ e una di $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 13. Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2, e siano

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f\colon & V & \to & \mathbb{R}^3 \\ & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a \cdot w_1 + \mathrm{tr}(A) \cdot w_2 \end{array}$$

Si dimostri che f è lineare, e si calcoli la sua matrice rispetto alle basi seguenti, rispettivamente di V e $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Esercizio 14. Siano A e A' matrici simili. Dimostrare che $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$.