Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.7

25.11.2021

Esercizio 1. Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to U$ applicazioni lineari fra spazi vettoriali. Si dimostri che $\ker(g \circ f) \supseteq \ker(f)$. Si trovi un esempio di applicazioni f e g per cui $\ker(g \circ f) = \ker(f)$, e si trovi anche un esempio per cui $\ker(g \circ f) \neq \ker(f)$.

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema (nelle incognite x, y, z, w):

$$\begin{cases} x + 2y - z + w & = & 0 \\ -x + 3y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

e l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dica se U è contenuto in $\ker(f)$, e se contiene $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 3. Dire quando i prodotti AB, BA, CD e DC sono definiti, e in caso affermativo calcolarli, per le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare tutte le matrici 2×2 che *commutano* con C, cioè tutte le matrici D tali che $CD = DC$.

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

cioè B ha le entrate tutte uguali a zero, tranne quelle sulla diagonale principale, che sono uguali a λ. Si dimostri che

$$AB = BA$$

Esercizio 6. Siano A e B due matrici $n \times n$. Ricordiamo che la traccia di una matrice (denotata $\mathrm{tr}(A)$) è la somma degli elementi sulla diagonale principale. Si dimostri che

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Esercizio 7. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, una matrice $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $AB = I_2$.

Esercizio 8. Sia A una matrice $n \times n$ a entrate in $\mathbb{R}$.

(1) Dimostrare che $A + {}^tA$ è una matrice simmetrica, e che $A - {}^tA$ è una matrice antisimmetrica.

(2) Dimostrare che A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.
(3) Rispondere alle domande seguenti, giustificando la risposta (se sì, dimostrarlo, altrimenti trovare un controesempio):
  (a) è vero che $A \cdot {}^tA$ è sempre simmetrica?
  (b) è vero che è sempre uguale a ${}^tA \cdot A$?

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale, e siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di V. Si consideri il seguente sottoinsieme del duale V^*:

$$W = \{\eta \in V^* \mid \eta(v_1) = 0, \ldots, \eta(v_n) = 0\}.$$

Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale di V^*.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\Phi \colon V^* \to K$ un'applicazione lineare (cioè un elemento del *duale del duale di* V, che si chiama il *biduale* di V). Sia $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di V e $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ la base duale. Si dimostri che

$$\Phi(\eta) = \eta(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n)$$

dove $c_1 = \Phi(\eta_1), \ldots, c_n = \Phi(\eta_n)$.