Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.6

18.11.2021

Esercizio 1. Calcolare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori v_1, v_2, v_3 dell'esercizio precedente. Sia v il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si trovi v come elemento di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno stesso spazio vettoriale. Supponiamo che le coordinate di tutti i vettori siano sempre le stesse, rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$, cioè supponiamo che valga

$$F_{\mathcal{B}}(v) = F_{\mathcal{B}'}(v)$$

per ogni $v \in V$. Dimostrare che allora le due basi sono uguali. (Suggerimento: si può usare la risposta all'esercizio precedente.)

Esercizio 5. Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ base di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ di dimensione 2, e sia $w = sv_1 + tv_2$ dove s e t sono numeri complessi. Trovare i valori di $s, t \in \mathbb{C}$ per cui $\mathcal{B}' = (v_1, w)$ è una base di V.

Esercizio 6. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti applicazioni sono lineari.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

(2) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \\ c \cdot d \end{pmatrix}$$

(3) $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che, data una matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, la sua immagine $f(A)$ è uguale alla somma di tutte le entrate di A.

(4) $f\colon K[x] \to K[x]$, dove K è un campo qualsiasi, definita nel modo seguente: dato un polinomio

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

la sua immagine $f(p)$ tramite f è il polinomio

$$f(p) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1$$

Esercizio 7. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data dalla formula

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -2b \\ 3a-b \\ a \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice A tale che $f = L_A$.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I tre vettori di cui calcoliamo la f formano una base di $\mathbb{R}^3$.) Trovare una matrice A tale che $f = L_A$.

Esercizio 9. Trovare una matrice A tale che l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ soddisfi

$$L_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$L_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dire, giusificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11. Trovare generatori del nucleo $\ker(f)$ e generatori dell'immagine $\operatorname{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-w \\ z+2w \end{pmatrix}$$

Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ e di $\operatorname{Im}(f)$.

Esercizio 12. Trovare una matrice A tale che il nucleo $\ker(L_A)$ di $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sia il sottospazio generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e tale che l'immagine $\operatorname{Im}(L_A)$ sia il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$