Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.5

11.11.2021

Esercizio 1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e W il sottospazio generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base della somma $U + W$ e una base dell'intersezione $U \cap W$.

Esercizio 2. Calcolare la dimensione dell'intersezione $U \cap W$, dove U è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e W è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

È vero che $W \subseteq U$? È vero che $U = W$?

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+i \\ -i \end{pmatrix}$$

e sia $W \subseteq \mathbb{C}^3$ definito dal seguente sistema di equazioni lineari nelle variabili z_1, z_2, z_3:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 - z_3 & = & 0 \\ -iz_1 + z_3 & = & 0 \end{cases}$$

Sia infine

$$v = \begin{pmatrix} i \\ i \\ -2i \end{pmatrix}.$$

(1) Trovare vettori $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$.
(2) Sia v' un qualsiasi altro vettore di $\mathbb{C}^3$. Sarebbe possibile comunque trovare $u' \in U$ e $w' \in W$ tali che $v' = u' + w'$?

Esercizio 5. Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5, e siano U, W due suoi sottospazi di dimensione 3. Quali sono le possibili dimensioni di $U \cap W$?

Esercizio 7. Supponiamo di avere vettori v_1, v_2, v_3, v_4 in uno spazio vettoriale V. Supponiamo che (v_1, v_2) sia una base di $U = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$, e che (v_3, v_4) sia una base di $W = \mathrm{Span}\{v_3, v_4\}$. Supponiamo inoltre che

$$U \cap W = \{O\}.$$

Dimostrare che allora i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti.