Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.4

4.11.2021

Esercizio 1. Determinare se le seguenti sono basi di V:

(1) $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, dove $V = \mathbb{R}^3$ e
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$$

(2) $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, dove $V = \mathbb{R}^5$ e
$$u_1 = \begin{pmatrix}10\\1\\12\\0\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\\-4\\0\end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix}0\\-4\\4\\8\\-3\end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix}10\\1\\12\\0\\1\end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix}0\\5\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

(3) $\mathcal{B}_3 = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, dove $V = \mathbb{R}^4$ e
$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\\-2\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\4\\2\end{pmatrix}$$

In caso negativo, dire quale delle due condizioni fallisce, cioè se non sono generatori di $\mathbb{R}^n$, oppure se non sono linearmente indipendenti, oppure entrambe le cose.

Esercizio 2. Consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dell'esercizio precedente. Scartare alcuni dei vettori in modo che i rimanenti formino una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Consideriamo i vettori v_1 e v_2 dell'esercizio precedente. Trovare dei vettori appartenenti alla base canonica e tali che, presi assieme a v_1 e v_2, formino una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:
$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix}-2\\-\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Sia $U = \mathrm{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da questi vettori. Trovare una base di U.

Esercizio 5. Consideriamo i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}\frac{t}{2}\\2\\1-t\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}t\\2t\\-t\end{pmatrix}.$$

Si noti che dipendono tutti da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ generato da v_1, v_2 e v_3, al variare del parametro t.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2. Dimostrare che $\mathcal{B} = (x^2 + x + 1, x + 1, 1)$ e $\mathcal{C} = (x^2 + 1, x^2 - x, x)$ sono entrambe basi di V. Calcolare le coordinate del vettore $x^2 + 2$ in entrambe le basi.

Esercizio 7. Si consideri $V = K[x]_{\leq d}$ dove K è un campo e d un intero non negativo. Sia $\mathcal{B} = (p_0, \dots, p_d)$ una $(d+1)$-upla di elementi di V, che soddisfano la seguente condizione: per ogni $i \in \{0, \dots, d\}$ uno ed un solo polinomio fra essi ha grado i. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V.

Esercizio 8. Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a entrate in $\mathbb{C}$, e sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a + d = 0 \right\}.$$

(1) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V.
(2) Si considerino le matrici

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si dimostri che (e, h, f) è una base di W.

Esercizio 9. Dimostrare che esistono infinite basi di $\mathbb{R}^2$.