Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.3

28.10.2021

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, e sia $O \in V$ il vettore nullo.

(1) Siano $v, w, u \in V$, e supponiamo che
$$v + w = v + u.$$
Dimostrare che allora $w = u$. (Cioè in un'uguaglianza fra somme si possono "cancellare" gli addendi uguali, come siamo abituati a fare.)

(2) Dimostrare che per ogni $\lambda \in K$ vale
$$\lambda \cdot O = O.$$

(3) Supponiamo di avere un elemento $\lambda \in K$ e un elemento $v \in V$ tali che
$$\lambda \cdot v = O.$$
Dimostrare che $\lambda = 0$ oppure $v = O$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}[z]$. Determinare quali dei seguenti suoi sottoinsiemi ne forniscono un sottospazio vettoriale:
$$\begin{aligned} U &= \{p \in \mathbb{C}[z] \mid p(i) = 0\}, \\ V &= \{p \in \mathbb{C}[z] \mid p(i) + p(1) = 0\}, \\ W &= \{p \in \mathbb{C}[z] \mid p(i) \cdot p(1) = 0\}, \\ Z &= \{p \in \mathbb{C}[z] \mid p(0) = i\}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Determinare se gli elenchi seguenti di vettori sono linearmente dipendenti, e, se sì, trovare dei coefficienti non tutti nulli in modo che la combinazione lineare dei vettori con questi coefficienti sia uguale al vettore nullo:

(1) i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
di $\mathbb{R}^3$;

(2) i vettori
$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
di $\mathbb{R}^2$;

(3) i vettori
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Dati i vettori di $\mathbb{C}^3$
$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},$$
decidere se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, e se $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathbb{C}^3$. Trovare, se possibile, tutte le combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3 che forniscono il vettore
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

determinare i valori di α per cui v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6. Siano S e T due sottoinsiemi di uno stesso spazio vettoriale V.

(1) Dimostrare che se $S \subseteq T$ allora $\mathrm{Span}(S) \subseteq \mathrm{Span}(T)$.
(2) Trovare un esempio in cui $\mathrm{Span}(S) \subseteq \mathrm{Span}(T)$ ma S *non è* un sottoinsieme di T.

Esercizio 7. Verificare che

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (x^2 + x + 1, x + 1, 1), \\ \mathcal{C} &= (x^2 + 1, x^2 - x, x) \end{aligned}$$

sono entrambi basi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Scrivere le coordinate di $x^2 + 2$ nelle due basi.

Esercizio 8. Determinare l'insieme dei polinomi $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tali che il loro grafico

$$\Gamma_p = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 9. Rispondere alle domande seguenti, motivando la risposta.

(1) È possibile che l'insieme vuoto sia uno spazio vettoriale?
(2) È possibile che un insieme con solo un elemento sia uno spazio vettoriale?
(3) È possible che un insieme con solo due elementi sia uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$?