

Corso di Geometria

Docenti: Guido Pezzini, Alessandro D'Andrea

a.a. 2021/2022

Foglio di esercizi n.10 (con soluzioni)

16.1.2022

Raccomando vivamente di fare gli esercizi senza guardare le soluzioni, e usarle solo in seguito per controllare il proprio svolgimento.

In questi esercizi indichiamo con $\text{pr}_w(v)$ la proiezione ortogonale del vettore v sul sottospazio $\text{Span } w$.

Esercizio 1. Dimostrare che, se M è una matrice ortogonale a entrate in \mathbb{R} , allora $\det(M)$ è 1 oppure -1 .

Soluzione esercizio 1. Sappiamo che $M^{-1} = M^t$. Inoltre $\det(M^t) = \det(M)$, e $\det(M^{-1})$ è l'inverso di $\det(M)$. Concludiamo che

$$\det(M) = \det(M^t) = \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

Quindi $\det(M)^2 = 1$. Gli unici numeri reali che al quadrato fanno 1 sono 1 e -1 .

Esercizio 2. (1) Siano $a, c \in \mathbb{R}$ due numeri tali che $a^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

è ortogonale e ha determinante uguale a 1.

(2) Viceversa, sia A matrice 2×2 qualsiasi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a entrate in \mathbb{R} , e supponiamo che A sia ortogonale, con $\det(A) = 1$. Dimostrare che allora $b = -c$ e $d = a$, e che $a^2 + c^2 = 1$.

Soluzione esercizio 2. (1) Calcoliamo il determinante di A :

$$\det(A) = a^2 - (-c) \cdot c = a^2 + c^2$$

quindi $\det(A) = 1$. Allora la formula per l'inversa di A produce

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e otteniamo precisamente la trasposta di A .

(2) Dato che $\det(A) = 1$, abbiamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Visto che A è ortogonale, questa matrice deve essere uguale ad A^t , cioè

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Deduciamo che $a = d$ e che $b = -c$. Calcoliamo allora il determinante di A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 + c^2$$

Dato che $\det(A) = 1$, concludiamo che $a^2 + c^2 = 1$.

Esercizio 3. (1) Siano U, W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n , e supponiamo che $U \subseteq W$. Dimostrare che allora $U^\perp \supseteq W^\perp$.

(2) Sia U un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Dimostrare che

$$(U^\perp)^\perp = U$$

(3) Siano U, W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n . Dimostrare che, se

$$U^\perp = W^\perp,$$

allora $U = W$.

Soluzione esercizio 3. (1) Sia $v \in W^\perp$. Dobbiamo dimostrare che $v \in U^\perp$, cioè che per ogni $u \in U$ abbiamo

$$\langle v, u \rangle = 0$$

Dato che $U \subseteq W$, sappiamo che u è anche un elemento di W . D'altronde sappiamo che v è ortogonale a tutti i vettori di W . Concludiamo che v è ortogonale anche a u .

(2) Dimostriamo innanzitutto che

$$(U^\perp)^\perp \supseteq U$$

Sia allora $u \in U$, e verifichiamo che $u \in (U^\perp)^\perp$. Sappiamo che $(U^\perp)^\perp$ è l'insieme di tutti i vettori ortogonali a U^\perp , quindi dobbiamo verificare che u è ortogonale a U^\perp . Ma questo è chiaro: ogni vettore di U^\perp è ortogonale a tutti i vettori di U , quindi in particolare è ortogonale al vettore u .

Abbiamo dimostrato l'inclusione

$$(U^\perp)^\perp \supseteq U$$

Si tratta di due sottospazi, uno incluso nell'altro. Calcoliamone la dimensione:

$$\dim((U^\perp)^\perp) = n - \dim(U^\perp) = n - (n - \dim(U)) = \dim(U)$$

Quindi i due sottospazi hanno la stessa dimensione. Segue che sono uguali.

(3) Usiamo la parte (2). Se U^\perp è uguale a W^\perp , allora sono uguali i rispettivi complementi ortogonali, cioè

$$(U^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp$$

Ma questi sono rispettivamente U e W grazie alla parte (2), quindi concludiamo $U = W$.

Esercizio 4. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di \mathbb{R}^3 formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Ricordiamo la formula della proiezione di un vettore v su w :

$$\text{pr}_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

Il procedimento di Gram-Schmidt definisce la nuova base come

$$\begin{cases} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \text{pr}_{w_1}(v_2) \\ w_3 &= v_3 - \text{pr}_{w_1}(v_3) - \text{pr}_{w_2}(v_3) \end{cases}$$

Calcoliamo allora:

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_1 \rangle &= \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2, \\ \langle v_2, w_1 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle = -2 + 0 + 0 = -2 \end{aligned}$$

da cui deduciamo

$$w_2 = v_2 - \text{pr}_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 + w_1$$

cioè

$$w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle = 0 + 3 + 0 = 3$$

Quindi

$$\text{pr}_{w_1}(v_3) = \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \frac{3}{2} w_1$$

Calcoliamo

$$\langle w_2, w_2 \rangle = (-1)^2 + (1)^2 + 2^2 = 6$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = 0 + 3 + 2 = 5$$

da cui segue

$$\text{pr}_{w_2}(v_3) = \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \frac{5}{6} w_2$$

Concludendo:

$$w_3 = v_3 - \frac{3}{2} w_1 - \frac{5}{6} w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} \\ 3 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6} \\ 1 - \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di U e una base ortonormale di U^\perp .

Soluzione esercizio 5. Troviamo prima di tutto una base di U . I quattro vettori u_1, u_2, u_3, u_4 generano U , ma potrebbero essere linearmente dipendenti. Usiamo l'algoritmo di Gauß sulla matrice che li ha per colonne:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Scambiamo le prime due righe:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

e facciamo $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Facendo $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

e facendo $R_4 \rightarrow R_4 - 3R_3$ otteniamo infine

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è a scalini, con i tre pivot nelle prime tre colonne. Quindi u_4 è superfluo, e una base di U è fatta dai vettori u_1, u_2, u_3 .

Possiamo renderla ortogonale con Gram-Schmidt. Poniamo

$$\begin{cases} w_1 = u_1 \\ w_2 = u_2 - \text{pr}_{w_1}(u_2) \\ w_3 = u_3 - \text{pr}_{w_1}(u_3) - \text{pr}_{w_2}(u_3) \end{cases}$$

Troviamo $\text{pr}_{w_1}(u_2) = \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$. Calcoliamo

$$\langle u_2, u_1 \rangle = 1, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 2$$

quindi

$$\text{pr}_{w_1}(u_2) = \frac{1}{2} u_1$$

e

$$w_2 = u_2 - \text{pr}_{w_1}(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo $\text{pr}_{w_1}(u_3) = \frac{\langle u_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$. Abbiamo

$$\langle u_3, u_1 \rangle = 11,$$

quindi

$$\text{pr}_{w_1}(u_3) = \frac{11}{2} u_1$$

Troviamo $\text{pr}_{w_2}(u_3) = \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$. Abbiamo

$$\langle u_3, w_2 \rangle = -\frac{5}{2}, \quad \langle w_2, w_2 \rangle = \frac{3}{2}$$

quindi

$$\text{pr}_{w_2}(u_3) = -\frac{5}{3} w_2$$

Concludiamo

$$w_3 = u_3 - \text{pr}_{w_1}(u_3) - \text{pr}_{w_2}(u_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

L'esercizio richiede una base ortonormale, che otteniamo dividendo w_1, w_2, w_3 per le loro rispettive norme:

$$\|w_1\| = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle} = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \|w_3\| = \sqrt{\langle w_3, w_3 \rangle} = \frac{\sqrt{112}}{\sqrt{3}}$$

Rimane da trovare una base ortogonale di U^\perp . Sappiamo che un vettore v è in U^\perp se e solo se è ortogonale a un insieme di generatori di U , ad esempio u_1, u_2, u_3 . Cioè U^\perp è descritto dalle condizioni

$$\begin{cases} \langle v, u_1 \rangle = 0 \\ \langle v, u_2 \rangle = 0 \\ \langle v, u_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

Ponendo

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -y - z & = 0 \\ x - y & = 0 \\ -x - 4y - 7z + 6t & = 0 \end{cases}$$

Sappiamo che U ha dimensione 3, quindi U^\perp ha dimensione $4-3 = 1$. Infatti la matrice dei coefficienti del sistema è la matrice che ha u_1, u_2, u_3 per righe, quindi il suo rango è 3. Dobbiamo quindi trovare un solo vettore di U^\perp (non nullo) per avere una base. Assegnando ad esempio $x = 1$ abbiamo $y = 1$, $z = -1$, e $-1 - 4 + 7 + 6t = 0$, cioè $t = -\frac{1}{3}$. Allora

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

è una base di U^\perp . Troviamo una base ortonormale dividendo v per la sua norma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

Esercizio 6. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Scrivere v come somma di un vettore di U e un vettore di U^\perp .

Soluzione esercizio 6. Sappiamo che esistono u, u' tali che $u \in U, u' \in U^\perp$, e

$$v = u + u'$$

Per definizione, il vettore u è la proiezione ortogonale di v su U , cioè

$$u = \text{pr}_U(v)$$

Sappiamo calcolare facilmente $\text{pr}_U(v)$ se abbiamo una base *ortogonale* di U , quindi applichiamo Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ di U (si vede facilmente che sono due vettori linearmente indipendenti):

$$\begin{cases} w_1 & = u_1 \\ w_2 & = u_2 - \text{pr}_{w_1}(u_2) \end{cases}$$

Calcolando w_2 come negli esercizi precedenti troviamo

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo applicare la formula

$$\text{pr}_U(v) = \text{pr}_{w_1}(v) + \text{pr}_{w_2}(v)$$

Calcoliamo esplicitamente:

$$\text{pr}_{w_1}(v) + \text{pr}_{w_2}(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \frac{-1}{5} w_1 + \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{36}{5}} w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

e

$$u' = v - u = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D (entrambe 2×2) tali che

$$D = M^{-1}AM$$

Soluzione esercizio 7. Troviamo gli autovalori, e una base ortonormale di autovettori, per l'endomorfismo L_A di $V = \mathbb{R}^2$. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 9 = x^2 - 2x - 8$$

Le radici sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$. I due autospazi V_{-2} e V_4 hanno dimensione almeno 1, e siamo in \mathbb{R}^2 , quindi entrambi hanno dimensione 1.

Troviamo due autovettori. Per $\lambda = -2$, cerchiamo $v \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (A + 2I)v = 0$$

cioè

$$\begin{cases} (1+2)x + 3y = 0 \\ 3x + (1+2)y = 0 \end{cases}$$

che è equivalente alla singola equazione $x + y = 0$. Segue che una base di V_{-2} è il vettore

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lo stesso conto per $\lambda = 4$ produce la base di V_4 data dal vettore (ad esempio)

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che v_1 e v_2 sono ortogonali, perchè sono autovettori di un endomorfismo simmetrico e hanno autovalori diversi. Rimane da ricavare una base ortonormale, dividendo per la loro norma. Otteniamo la base ortonormale di autovettori $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2)$ dove

$$v'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Allora M è la matrice di colonne v'_1, v'_2 , e D è la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Infatti, rispetto alla base \mathcal{B}' l'endomorfismo L_A ha matrice D .

Esercizio 8. Dire, motivando la risposta, se

(1) esiste un endomorfismo simmetrico $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori;

(2) esiste un endomorfismo simmetrico $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 8. (1) Sappiamo che gli autovettori di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali, **se i loro rispettivi autovalori sono diversi**. I due vettori v_1 e v_2 non sono ortogonali, infatti $\langle v_1, v_2 \rangle = 2 - 1 = 1$. Però nulla impedisce che siano autovettori con lo stesso autovalore. Ad esempio l'endomorfismo identità, che ha per matrice canonica la matrice identità

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è simmetrico, ha un solo autovalore $\lambda = 1$, e tutti i vettori non nulli di \mathbb{R}^2 sono autovettori. Quindi anche v_1 e v_2 . La risposta alla domanda perciò è "sì".

(2) Se f è un endomorfismo simmetrico, allora per ogni v, w vale $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$. Proviamo con v e w uguali ai due vettori di cui è assegnata l'immagine, cioè

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\langle f(v), w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 4 + 2 = 5,$$

$$\langle v, f(w) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 0 - 1 = 0$$

I due valori sono diversi, per cui una f con queste proprietà non esiste.

Esercizio 9. Sia $f: V \rightarrow V$ dove $V = \mathbb{R}^4$ e $f = L_A$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortogonale di \mathbb{R}^4 formata da autovettori di f .

Soluzione esercizio 9. Troviamo gli autovalori di A trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \dots$$

Sviluppando secondo la prima riga otteniamo:

$$\begin{aligned} \dots &= (-x) \cdot \begin{vmatrix} -x & 0 & -1 \\ 0 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = \\ &= (-x) \cdot (-x^3 + 0 + 0 - (-x) - (-x) - 0) - (x^2 + 0 + (-1) - 0 - 1 - 0) + \\ &\quad + (0 + 0 + 1 - 0 - (-1) - x^2) = \\ &= x^4 - 4x^2 + 4 \end{aligned}$$

Con la formula delle radici dei polinomi di secondo grado si trova $x^2 = 2$ se $p_A(x) = 0$, quindi le radici di $p_A(x)$ sono $\lambda = \sqrt{2}$ e $\lambda = -\sqrt{2}$.

Troviamo gli autospazi. Per $V_{\sqrt{2}}$ troviamo, con il solito metodo, due generatori linearmente indipendenti, ad esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e per $V_{-\sqrt{2}}$ troviamo ad esempio

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Quindi (v_1, v_2) è una base di $V_{\sqrt{2}}$, e (v_3, v_4) è una base di $V_{-\sqrt{2}}$.

Osserviamo che v_1 non è ortogonale a v_2 , e inoltre v_3 non è ortogonale a v_4 . Applichiamo Gram-Schmidt alle due basi trovate. Con la prima otteniamo

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \text{pr}_{w_1}(v_2) \end{cases}$$

ed esplicitamente otteniamo

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Quindi (w_1, w_2) è una base ortogonale di $V_{\sqrt{2}}$. Per $V_{-\sqrt{2}}$:

$$\begin{cases} w_3 = v_3 \\ w_4 = v_4 - \text{pr}_{w_3}(v_4) \end{cases}$$

e otteniamo

$$w_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e abbiamo che (w_3, w_4) è una base ortogonale di $V_{-\sqrt{2}}$. Inoltre sappiamo che vale

$$w_1 \perp w_3, \quad w_1 \perp w_4, \quad w_2 \perp w_3, \quad w_2 \perp w_4$$

perché in tutti e quattro i casi si tratta di due vettori che sono autovettori di autovalori diversi. Quindi (w_1, w_2, w_3, w_4) è una base ortogonale di autovettori per f .

Esercizio 10. Determinare se le seguenti applicazioni $b_i: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono forme bilineari, e in caso affermativo calcolarne la matrice rispetto alla base canonica.

(1)

$$b_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) = 2xt - yz + 3yt$$

(2)

$$b_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) = |x|^2 - yz$$

(3)

$$b_3 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right) = 3xy + yt$$

Soluzione esercizio 10. (1) L'applicazione b_1 è una forma bilineare. Infatti, calcoliamone i valori sulla base canonica:

$$b_1(e_1, e_1) = 0, \quad b_1(e_1, e_2) = 2, \quad b_1(e_2, e_1) = -1, \quad b_1(e_2, e_2) = 3,$$

Mettiamoli in una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$(x \ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -z + 3t \end{pmatrix} = 2xt - yz + 3yt$$

che è proprio l'espressione di b_1 . Quindi

$$b_1(u, v) = u^t \cdot A \cdot v$$

e concludiamo che b_1 è una forma bilineare. Abbiamo già calcolato la sua matrice A .

- (2) L'applicazione b_2 non è una forma bilineare. Il fatto che la sua espressione contenga $|x|^2$ rende improbabile che lo sia: è facile trovare $x, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che $|\lambda x|^2 \neq \lambda|x|^2$, ad esempio $x = 1$ e $\lambda = -1$.

Vediamo meglio il ragionamento. Ricordiamo che se b_2 fosse una forma bilineare, avremmo

$$b_2(\lambda u, v) = \lambda b_2(u, v)$$

per ogni $u, v \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Scegliamo allora

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\lambda = -1$. Otteniamo

$$b_2(\lambda u, v) = |-1 \cdot 1^2|^2 - 0 \cdot 0 = 1$$

e

$$\lambda b_2(u, v) = -1 \cdot (|1^2|^2 - 0 \cdot 0) = -1$$

quindi $b_2(\lambda u, v) \neq \lambda b_2(u, v)$. Segue che b_2 in effetti non è una forma bilineare.

- (3) Neanche b_3 è una forma bilineare. Anche se è data da un polinomio omogeneo di secondo grado, le variabili x e y (cioè due entrate del primo argomento) compaiono moltiplicate. Quindi probabilmente non sarà vero che $b(\lambda u, v) = \lambda b(u, v)$.

Scegliamo allora

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\lambda = 2$. Otteniamo

$$b_3(\lambda u, v) = 3 \cdot \lambda \cdot \lambda + \lambda \cdot 0 = 12$$

e

$$\lambda b_3(u, v) = 2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 6$$

quindi $b_3(\lambda u, v) \neq \lambda b_3(u, v)$. Segue che b_3 in effetti non è una forma bilineare.

Esercizio 11. Calcolare la matrice rispetto alla base canonica della forma bilineare $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$b \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 x_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 - 2y_1 z_2 + 3z_1 x_2 + z_1 z_2$$

e calcolarne anche la matrice rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ data da

$$v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La forma bilineare b è simmetrica?

Soluzione esercizio 11. La prima matrice si ottiene calcolando b sui vettori della base canonica. Abbiamo

$$\begin{aligned} b(e_1, e_1) &= 1, & b(e_1, e_2) &= 1, & b(e_1, e_3) &= 0, \\ b(e_2, e_1) &= -1, & b(e_2, e_2) &= 0, & b(e_2, e_3) &= -2, \\ b(e_3, e_1) &= 3, & b(e_3, e_2) &= 0, & b(e_3, e_3) &= 1 \end{aligned}$$

quindi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice rispetto a \mathcal{B}' si ottiene calcolando b sui vettori della base \mathcal{B}' . Abbiamo

$$\begin{aligned} b(v'_1, v'_1) &= 1, & b(v'_1, v'_2) &= -1, & b(v'_1, v'_3) &= 6, \\ b(v'_2, v'_1) &= 4, & b(v'_2, v'_2) &= -3, & b(v'_2, v'_3) &= -5, \\ b(v'_3, v'_1) &= 1, & b(v'_3, v'_2) &= -9, & b(v'_3, v'_3) &= -7 \end{aligned}$$

quindi la matrice di b rispetto alla base \mathcal{B}' è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

Queste matrici non sono simmetriche, cioè abbiamo già trovato vettori v, w tali che $b(v, w) \neq b(w, v)$, e allora b non è simmetrica.

Esercizio 12. Calcolare la segnatura della forma bilineare simmetrica $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale b ha matrice diagonale, tale che ciascun numero sulla diagonale è 1, oppure -1 , oppure 0 (come nel Teorema di Sylvester).

Soluzione esercizio 12. Per trovare la segnatura, calcoliamo gli autovalori di A . Con il solito metodo del polinomio caratteristico si trovano gli autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 8$ e $\lambda = -3$. Abbiamo un autovalore positivo, uno negativo, e uno nullo (contati con la loro molteplicità geometrica, che è 1 in tutti e tre i casi), quindi la segnatura è $(1, 1, 1)$.

Una base in cui b ha matrice diagonale è una base ortogonale di autovettori di A . Con il metodo solito, si trovano gli autovettori

$$v'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

di autovalori rispettivamente 8, -3 e 0.

Questi autovettori sono già ortogonali, anche perché sono autovettori di una matrice simmetrica ed hanno autovalori diversi. Se avessimo avuto degli autospazi di dimensione maggiore di 1, **in ciascuno di essi** avremmo potuto usare Gram-Schmidt per ortogonalizzare la base trovata.

Per avere una base in cui la matrice di b non sia solo diagonale, ma abbia sulla diagonale solo 1, -1 oppure 0, dobbiamo normalizzare i 3 vettori trovati, dividendoli per la loro norma. Poi dobbiamo dividere quelli che hanno autovalore non nullo per la radice quadrata del modulo dell'autovalore. Otteniamo

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v'_1}{\|v'_1\| \cdot \sqrt{|8|}} = \frac{v'_1}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{v'_1}{4} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \\ w_2 &= \frac{v'_2}{\|v'_2\| \cdot \sqrt{|-3|}} = \frac{v'_2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{v'_2}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w_3 = \frac{v'_3}{\|v'_3\|} = \frac{v'_3}{\sqrt{4+1+1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Una base come richiesto dall'esercizio quindi è $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$.